双曲型套网格差分逼近及其稳定性

陈传淡 编著

厦门大学出版社

双曲型套网格差分逼近及其稳定性

陈传淡 编著

厦门大学出版社

[闽]新登字 09 号

双曲型套网格差分逼近及其稳定性

陈传淡　编著

*

厦门大学出版社出版发行
福建省新华书店经销
厦门大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　6.25 印张　151 千字
1993 年 12 月　第 1 版　1993 年 12 月　第 1 次印刷
印数：1—1000 册
ISBN　7—5615—0856—5/O·52
定价：5.50 元

序　言

在计算机科学有了空前的发展的时代，对数理方程的解不能再停留在研究存在定理上，而是要求数值解，这样才能使数学在工程应用上出现一个新局面. 陈传淡教授所著双曲型套网格差分逼近及其稳定性，是适应时代需求的著作. 本书是研究双曲线型偏微分方程差分逼近解的一部承前启后的著作. 他将国际上这方面学者 Godunov－Ryabenkii，M. Ciment，H. O. Kreiss，J. Oliger，M. Goldberg 等人的工作作了系统的综述，并介绍了国内学者李欣恺、朴致淳对套网格的有限差分方法. 陈先生在前人工作的基础上提出了多重套网格问题的不同区域不同网格及不同差分格式的简便稳定性判别方法. 本书的特点是继承前人结果，并提出自己的新思路和方法. 同时在写作上是由浅到深，使初学者容易入门并达到纵深的领域. 所以可以说是一部承前启后的著作.

李文清

1993 年 10 月 6 日

引　言

关于双曲型偏微分方程式差分逼近的初边值多边值问题均需要给定若干人工边界条件.由于线性齐次常系数双曲型方程的解沿特征线的值为常数,故差分格式计算时,它对于人工给定的初边值的影响非常敏感.

此外根据稳定性的定义来判别稳定性的方法是比较困难的.因此寻求简便的代数判别方法成为一个很重要的途径.关于这问题的发展,简述如下:

(1)　首先有 Godunov－Ryabenkii 判别稳定性的行列式条件.[1]

(2)　以后有 M. Ciment[2][3]讨论了关于原点两侧应用相同或不同的耗散格式的稳定性判别方法.

(3)　以后有 H. O. Kreiss 等人的若干稳定性定义及判别方法.[4][5]

(4)　以后 J. Oliger 应用 H. O. Kreiss 理论讨论了混合双边值问题的稳定性判别法.[6]

(5)　以后有 M. Goldberg 及 E. Tadmor 发展为同内点无关的稳定性判别法的简便代数形式.[7][8][9][10]

(6)　再以后李欣伧、朴致淳等发展为套网格的有限差分方法,即对于两个不同区域作不同网格的划分,选用相同或不同精度的差分格式.得到了判别稳定性的若干简便的代数形式.[11]

(7)　最近陈传淡又发展为双边值问题稳定性判别方法的代

数形式.[12]此后更发展为对于多重套网格问题的不同区域不同网格及不同差分格式的稳定性的简便判别方法.[13][14][18]~[21]

本书限于讨论常系数适定的双曲型偏微分方程初边值问题差分逼近以及多重套网格差分方法稳定性的简便判别法则.这种方法的特色是切实可行,方便于应用.此外本书中所考虑的初始函数一般均假定具有某光滑阶数的已知函数.

目　　录

第四章　双曲型方程差分逼近的混合初边值问题及套网格方法

第一章　计算边界条件及其稳定性判别法

§1　运输方程计算上的边界条件

本节叙述关于单个未知数 u，一个空间变量 x 在定义区域 D 上的常系数适定的运输方程

$$\partial u/\partial t = c\partial u/\partial x \ (c>0)\ D\{(x,t);0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant T\} \tag{1.1}$$

的双边值问题

$$u(x,0)=\varphi(x),\ (0\leqslant x\leqslant 1)\ u(1,t)=\psi(t).\ (0\leqslant t) \tag{1.2}$$

这个方程的解可表示为：

$$u(x,t)=\begin{cases}\varphi(x+ct),\ (x\leqslant 1-ct)\\ \psi((x-1)/c+t).\ (x>1-ct)\end{cases} \tag{1.3}$$

令 $dx/dt=-c$，则 $\partial u/\partial t - c\partial u/\partial x = \partial u/\partial t + (\partial u/\partial x)(dx/dt) = du/dt = 0$，故沿 $dx/dt=-c$ 的积分曲线 $x+ct=$常数上，u 为常数. $x+ct=$常数称为(1.1)的特征曲线. 在这个问题中，左端 $x=0$ 处的 u 值依初值而确定. 但若在 $x=0$ 处给出另外边值，一般说来就会由于条件过多而无解. 因此必须采用单向的差分格式

$$(u(x,t+k)-u(x,t))/k=c(u(x+h,t)-u(x,t))/h, \tag{1.4}$$

若给出初始条件及 $x=1$ 处的边界条件，解即唯一决定.

此后均设 h 为空间网格的步长，$x_j = jh$；k 为时间网格步长，$t_n = nk$. $u(x_\nu, t_n) = u(\nu h, nk) = u_\nu^n$. u_ν^n 是离散网格函数的集合. 此后我们假定当 $u(x,t)$ 视为网格函数时，即指它在网格点(x_ν, t_n)上的值 $u(x_\nu, t_n)$集合全体.

对于离散的序列$\{u\} = \{u_0, u_1, \cdots, u_j, \cdots\}$其内积及范数定义为

$$(u,v)_h = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^* \cdot v_j \cdot h;\ \|u\|_h^2 = (u,u)_h\ .$$

定义 1.1 如果对于任意 $t_n = nk$ 及初值 $v(x,0)$，存在一个常数 K 同 k 无关，满足关系式

$$\|v(t)\|_h \leqslant K\|v(0)\|_h\ ,$$

则差分逼近式称为稳定的.（又称为柯西稳定）

如果对 x 的微商采用中心差商格式，例如使用 Lax－Wendroff 格式：

$$u(x,t+k) = L_w u(x,t) \equiv [I + \lambda(E - E^{-1})/2 + \lambda^2(E - 2I + E^{-1})/2] u(x,t).\ (\lambda = ck/h) \tag{1.5}$$

其中 E 为 x 方向位移算子. 那末，若在 x＝0 处，不给值即不能解，这称为计算上的边界条件. 正如同前面所述，事先是不知道的. 因而在计算上所必须的边界条件如何给定，还是有待解决的问题. 因此先要研究用某些方法给出的边界值时，对于收敛性、稳定性有什么影响？一般说来稳定性同范数有很大关系，现讨论 L_2 范数. 设对于 $x(-\infty < x < \infty)$定义函数 $v(x)$的范数为

$$\|v\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v(x_j)|^2 h < +\infty. \tag{1.6}$$

对于 L－w 格式，算子 L_w 由(1.5)定义，那么用付氏分析法：$v(x,t) = u(\alpha,t)e^{i\alpha x}$代入(1.5)得 $u(\alpha, t_{n+1}) = \Lambda(\alpha,t) u(\alpha, t_n)$其中 $\Lambda(\alpha,t)$称为增长因子，$i = \sqrt{-1}$，经过计算得：

$$\Lambda(\alpha,t) = 1 - i\lambda\sin\omega - \lambda^2(1 - \cos\omega),\ (\omega = \alpha h, \lambda = kc/h) \tag{1.7}$$

再用$(\sin^2\omega)/2+2\sin^4(\omega/2)=1-\cos\omega$代入得

$$|\Lambda(\alpha,t)|^2 = 1 - 4(kc/h)^2(1-(kc/h)^2)\sin^4(\omega/2). \quad (1.8)$$

由此可知，若

$$\lambda = kc/h \leqslant 1, \quad (1.9)$$

则就具有关于纯初值问题的稳定性.

对于(1.5)的初边值问题为：

$$u(x,t+k)=L_\omega u=[I+\lambda(E-E^{-1})/2$$

$$+\lambda^2(E-2I+E^{-1})/2]u(x,t), \quad (1.10)$$

$$u(x,0)=f(x),u(0,t)=H(t),u(1,t)=\psi(t). \quad (1.11)$$

这里给定的函数$H(t)$是在计算上必须引入的边界值，设它为有界的

$$|H(t)| < H_0.（常数） \quad (1.12)$$

§2 由计算上边界条件引起的不稳定现象

现用例说明由于计算上边界条件的某些给法，将会发生不稳定现象. 在区域$D:\{x\geqslant 0,t\geqslant 0\}$上考虑运输方程式：

$$\partial u/\partial t = \partial u/\partial x, \quad (2.1)$$

$$u(x,0) = f(x). \quad (2.2)$$

设$f(x)\in L_2$,(即 $\|f\|^2=\int_0^\infty|f(x)|^2dx<\infty$) 这个初值问题的解为

$$u(x,t) = f(x+t). \quad (2.3)$$

它沿特征线$x+t=c$使解取$f(c)$. 因此在$(x=0,t\geqslant 0)$上不需要任何边界条件.

现在用蛙跳差分格式 LF 解此问题：

$$(u(x,t+k)-u(x,t-k))/2k=(u(x+h,t)-u(x-h,t))/2h, \quad (2.4)$$

$$u(x,0) = f(x), u(x,k) = g(x). \quad (2.5)$$

这是三层格式，因而必须在 $t=0$，及 $t=k$ 处给定初值，在上式中必须适当地定出 $g(x)$. 例如可用格式

$$u(x,k)=u(x,0)-\lambda[u(x+h,0)-u(x-h,0)]/2. (\lambda=k/h) \quad (2.6)$$

于是，现在的问题是必须在 $x=0$ 处再给出某种边界条件. 这称为计算上的边界条件. 现用：

$$u(0,t) = \beta u(h,t) \quad (2.7)$$

来给出，在考虑稳定性时，对纯初值问题至少要满足下列 Von-Neumann 条件：

$$\lambda = k/h \leqslant 1. \quad (2.8)$$

令 $u_j^n=z^n e^{imjh}$ $(i=\sqrt{-1})$ 代入(2.4)得

$$z^2 - 2zi\lambda\sin(mh) - 1 = 0. \quad (2.9)$$

解得

$$z = i\lambda\sin(mh) \pm \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2(mh)}. \quad (2.10)$$

要使 $|z|\leqslant 1$，其条件为 $\lambda\leqslant 1$，即(2.8)成立. 但对于初边值问题建立有边界条件时，在边界上也要满足稳定的条件，现先叙述这些条件：(证明见后)即 Godunov－Ryabenkii 判别稳定性条件：

定理 1　设 $u(x_j,t_n)$ 是在离散的 L_2 空间中网格函数，要使差分格式(2.4)，(2.5)及边界条件(2.7)稳定，它就不能有下列形式的解：

$$u(x_j,t_n) = z^n\psi_j, (x_j = jh, t_n = nk, \psi_j \neq 0) \quad (2.11)$$

$$|z| > 1, \|\psi\|_h^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j|^2 h < \infty. \quad (2.12)$$

上述条件显然是必要的，因为若有此形式的解，则取

$$u(x_j,0) = \psi_j, \ u(x_j,k) = z\psi_j, \ u(x_j,nk) = z^n\psi_j, \ |z| > 1,$$

那么就会得出按指数增长的解，因而是不稳定.

Godunov-Ryabenkii 判别稳定性条件的代数形式：

定理 2 设 $u(x_j,t_n+k)=Qu(x_j,t_n)$是(2.1),(2.2)的差分逼近,其中 Q 为线性算子.其边界条件为 $v_j(t_n)=\sum_{i=1}^{s}C_{ij}V_i(t_n)$. 应用付氏分析法,即用 $u(x_j,t_n)=z^n\mu^j$ 代入差分格式后得到特征方程式 $P(\mu,z)=0$. 对于 $|z|>1$,满足 $|\mu_j|\leqslant 1$(又称为内根)的 μ_j 的线性组合，组合系数为 $[\sigma]=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_r\}$,即 $u(x_j,t_n)=z^n\psi_j$, $\psi_j=\sum_{|\mu|\leqslant 1}P(\sigma,j)\mu^j$,其中 $P(\sigma,j)$为 σ,j 的双线性代数多项式.把它代入到边界条件后得 $J(z)\sigma=0$,其中 $J(z)$为 r 阶矩阵.若 $\mathrm{Det}J(z)\neq 0$ $(|z|\geqslant 1)$则差分格式为稳定.

注一 $\mathrm{Det}J(z)\neq 0(|z|\geqslant 1)$称为 Godunov-Ryabenkii 判别稳定性条件的代数形式.

注二 上述二个定理就是 §4 定理 1 的原始形式,证明基本上相同.为了避免重复,这里只举例说明定理的应用,证明从略.(参看[1] §8.2)

例 设 $|z|>1$,把 $u(x_j,t_n)=z^n\psi_j$ 代入(2.4)得特征方程式为

$$(z^2-1)\psi_j=\lambda z(\psi_{j+1}-\psi_{j-1}). \tag{2.13}$$

设 $\psi_j=\mu^j$ 得特征方程可书为形式

$$P(\mu,z)=\mu^2-\mu(z^2-1)/(\lambda z)-1=0. \tag{2.14}$$

故 ψ_j 的一般解可书为形式：

$$\psi_j=a_1\mu_1^j+a_2\mu_2^j, \tag{2.15}$$

这由(2.15)回代到(2.13)即可知满足原方程,其中 μ_1,μ_2 是(2.14)的两个根,即：

$$\mu=(z^2-1)/(2\lambda z)\pm\sqrt{1+(z^2-1)^2/(4\lambda^2z^2)}. \tag{2.16}$$

由于 $\lambda<1$,故当 $|z|>1$,及 $\mu_1\mu_2=-1$ 故有

$$|\mu_2| > 1, |\mu_1| < 1. \tag{2.17}$$

若沿实轴 $z\to\infty$ 时，则对于这样的 z，由(2.16)中有一根逐渐增大，而另一个根趋于零. 在另一方面，在(2.14)中， 由于 $\lambda\leqslant 1$ 若限制 $|z|=1$ 即 $z=e^{i\theta}$ 时 $\mu=i(\sin\theta)/\lambda\pm\sqrt{1-\sin^2\theta/\lambda^2}$ 当 $\lambda>|\sin\theta|$ 时，有 $\mu=e^{i\psi}$ 的根. 但当 $|z|>1$ 时必不能有 $|\mu|=1$ 的根，这是因为把(2.14)书为形式 $z^2-\lambda z(\mu-1/\mu)-1=0$，若 $\mu=e^{i\psi}$，则变为 $z^2-2i\lambda z\sin\psi-1=0$，即 $z=i\lambda\sin\psi\pm\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}$ 由于 $|\lambda\sin\psi|<1$，故必有 $|z|=1$. 因此得当 $|z|>1$ 时，必有一个 μ 绝对值大于 1，另一个绝对值小于 1，没有 $|\mu|=1$ 的根. 从而可得到结论，$|\mu_1|<1$ 的根个数不变. 因此使 $\|\psi\|_h<+\infty$ 的通解为：

$$\psi_j = a_1\mu_1^j. \tag{2.18}$$

又由于要满足边界条件(2.17) $u(0,t)=\beta u(h,t)$. 现把 $u(x_j,t_n)=z^n\psi_j=z^na_1\mu_1^j$ 代入后得

$$a_1(\mu_1\beta-1)=0. \tag{2.19}$$

由此，若 $|\beta|\leqslant 1$，则上式必不能满足(除非 $a_1=0$). 因此若 $|z|>1$ 时，只有 $a_1=0$，即不存在形式(2.11)，(2.12)的解. 换言之，Godunov-Ryabenkii 条件为满足的. 因此这条件又可叙述为下列的代数形式：

$$|\beta|\leqslant 1.\ (\text{或 } \mu_1\beta-1\neq 0) \tag{2.20}$$

其次若 $\beta\leqslant -1$ 或 $\beta>\lambda^{-1}+\sqrt{1+\lambda^2}$ 时，均可求出满足(2.14)，(2.18)的 $z(|z|>1)$ 因而是不稳定的. 当 $\beta=1$ 时边界条件化为

$$u(0,t)=u(h,t). \tag{2.21}$$

这就是通常的外推方法. 由(2.20)可知 Godunov-Ryabenkii 条件是满足的. 但是必须在 L_2 函数空间中讨论此问题. 否则 Godunov-Ryabenkii 条件虽满足，并不一定为强稳定的. 现举二例说明：

例 1　解下列蛙跳(LF)差分方程的初值问题：

$$\begin{cases} u(x,t+k) = u(x,t-k) + u(x+h,t) - u(x-h,t), \\ u(0,t) = u(h,t), \end{cases} \tag{2.22}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1/\sqrt{h}, & x = 0,h, \\ 0 & ,x > h. \end{cases} \tag{2.23}$$

在这特例中，取 $Mh=1$，$nk=1$，而且设 $\lambda=k/h=1$，$M=n$. n 为时间步数. 利用边值条件(2.21)，(2.22)计算得结果：

j	0	1	2	3	4	5…
$u(x_j,0)$	$1/\sqrt{h}$	$1/\sqrt{h}$	0	0	0	0
$u(x_j,k)$	0	0	0	0	0	0
$u(x_j,2k)$	$1/\sqrt{h}$	$1/\sqrt{h}$	0	0	0	0
$u(x_j,3k)$	$-1/\sqrt{h}$	$-1/\sqrt{h}$	$-1/\sqrt{h}$	0	0	0
$u(x_j,4k)$ ……	$1/\sqrt{h}$	$1/\sqrt{h}$	$1/\sqrt{h}$	$1/\sqrt{h}$	0	0

由此得，格式(2.22)在初值条件 $u(0,t)=u(h,t)$之下 $u(x,t)$ 的值只能取为零或 $\pm 1/\sqrt{h}$. 并在 $x\geqslant t$ 时恒为零. $0\leqslant x\leqslant t$ 时，$|u|=1/\sqrt{h}$，故有

$$\|u(t_M)\|_h^2 = n, \quad \|u(t_M)\|_h = \sqrt{n} = \sqrt{T/k}. \; (M = n)$$

当时间步长 k 减少，尽管初值 $\|u(0)\|_h=\sqrt{2}$，差分解的 L_2 范数是以 $O(h^{-\frac{1}{2}})$增大. 换言之，当蛙跳格式应用边界条件(2.21)后解的范数是关于 $h^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{n}$ 的多项式增长，这不是强稳定，称为弱稳定，原因是此时 u 不属于 L_2 中.

例 2　　区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中的蛙跳格式 LF

在应用下列蛙跳格式求解时，

$$\begin{cases} u(x_j,t+k)=u(x_j,t-k)+u(x_{j+1},t)-u(x_{j-1},t), \\ \qquad\qquad (0<x_j<1) \\ u(x,0)=f(x),\ u(x,k)=g(x),\ u(0,t)=u(h,t), \\ \qquad\qquad u(1,t)=0. \end{cases} \tag{2.24}$$

这时是不稳定的. 由于这格式在 $x=1$ 给定一个边界条件 $u(1,t)=0$，它是计算上的边界条件，它也是使格式不稳定的因素. 下面是不稳定性的分析，应用上述的付氏分析法，设通解为 $\psi_j=a_1\mu_1^j+a_2\mu_2^j$，$u(x_j,t_n)=z^n\psi_j=z^n(a_1\mu_1^j+a_2\mu_2^j)$ 代入到 $u(0,t)=u(h,t)$，$u(1,t)=u(Mh,t)=0$ 得

$$a_1(\mu_1-1)+a_2(\mu_2-1)=0,\ a_1\mu_1^M+a_2\mu_2^M=0. \quad (Mh=1) \tag{2.25}$$

再利用 $\mu_2=-1/\mu_1$ 代入上式得

$$a_1\mu_1^{2M}+a_2(-1)^M=0,\ a_1(\mu_1-1)+a_2(\mu_2-1)=0. \tag{2.26}$$

可知若 a_1,a_2 有非零解，其条件为

$$\mathrm{Det}J=\begin{vmatrix} \mu_1^{2M}, & (-1)^M \\ \mu_1-1, & -(1+1/\mu_1) \end{vmatrix}=0, \tag{2.27}$$

即 $(1+\mu_1)\mu_1^{2M-1}=(-1)^M(1-\mu_1)$. 注意，这表示 Godunov-Ryabenkii 条件并不满足.

由上式可知只在 M 为偶数及 $\mu_1<1$ 时上式有解. 现令 $\mu_1=1-\varepsilon$，代入(2.27)得 $(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)^{2M-1}=\varepsilon$. 即 $\ln2+\ln(1-\varepsilon/2)+(2M-1)\ln(1-\varepsilon)=\ln\varepsilon$. 但是 $\ln(1-\varepsilon)\doteq-\varepsilon+\varepsilon^2/2$，$\ln(1-\varepsilon/2)\doteq-\varepsilon/2+\varepsilon^2/8$ 代入得 $\varepsilon=-\ln\varepsilon/2M+\ln2/2M+O(\varepsilon^2)$ 故得

$$\varepsilon=-\ln\varepsilon/2M+O(1/M)+O(\varepsilon^2). \tag{2.28}$$

这是因为 $\ln2-\varepsilon/2-(2M-1)\varepsilon=\ln\varepsilon$，$(2M-1/2)\varepsilon=\ln2+\ln\varepsilon+$

$O(\varepsilon^2)$，即 $\varepsilon=\ln 2/(2M-1/2)-\ln\varepsilon/(2M-1/2)+O(\varepsilon^2)$，当 M 很大时，略去 1/2 即得上式，反复迭代后得

$$\varepsilon=-(1/2M)\ln[-(1/2M)\ln\varepsilon]+O(1/M)+O(\varepsilon^2)$$

$$=(1/2M)\ln M-(1/2M)\ln\ln(-\varepsilon)+O(1/M)+O(\varepsilon^2)$$

$$=(1/2M)\ln M-(1/2M)\ln\ln M+O(\varepsilon^2)+O(1/M)$$ 故得

$$\varepsilon=(1/2M)\ln M+O((\ln\ln M)/M). \tag{2.29}$$

再由 $\mu_1=1-\varepsilon$ 得到

$$\mu_1=1-(\ln M)/(2M)+O((\ln\ln M)/M). \tag{2.30}$$

再由 $(z^2-1)M=\lambda z(\mu^2-1)$ 得 $z^2-\lambda(\mu^2-1)z/\mu-1=0$ 但 $\mu-1/\mu=-2\varepsilon$，故得 $z^2+2\varepsilon\lambda z-1=0$，故得 $z=-\lambda\varepsilon-\sqrt{1+\lambda^2\varepsilon^2}=-1-\lambda\varepsilon+\lambda^2\varepsilon^2/2=-1-\lambda\varepsilon+\cdots$ 再把(2.29)代入得

$$z=-1-(k\ln M)/2+O((\ln\ln M)/M). \tag{2.31}$$

故得 $|z|^n=e^{(t_n\ln M)/2}=e^{-t_n(\ln(1/M))/2}=(1/M)^{-t_n/2}=h^{-t_n/2}$，　$(Mh=1)$

故相应解 $u=z^n(a_1\mu_1^j+a_2\mu_2^j)$ 的范数为

$$\|u(x,t)\|_h=O(h^{-t_n/2}).$$

故为指数式增长．这时不稳定的原因由(2.27)可看出是 Godunov-Ryabenkii 条件不满足．

§3　波动方程的初边值问题

为了介绍稳定性理论，现考虑简单的波动方程

$$\partial u/\partial t=A\partial u/\partial x, A=\begin{pmatrix}-c,0\\0,c\end{pmatrix}(c>0), u=(u_1,u_2)'. \tag{3.1}$$

另外，所考虑的问题是在四分之一空间 $x\geqslant 0$ 及 $t\geqslant 0$ 中．在 $x=0$ 处，考虑必要的边界条件，由(3.1)可知

$$\partial u_1/\partial t + c\partial u_1/\partial x = 0, \partial u_2/\partial t - c\partial u_2/\partial x = 0. \qquad (3.2)$$

关于 u_2 的方程，其特征线为 $x+ct=$常数，它是沿 x 的负方向以速度 c 传播的运输方程. 同理 u_1 的方程其特征线为 $x-ct=$常数，它是沿 x 的正方向以速度 c 传播的运输方程. 因此在边界 $x=0$ 处不给值不行，现考虑齐次边界条件：

$$u_1(0,t) = \alpha u_2(0,t). \quad (x = 0, \alpha \text{ 为常数}) \qquad (3.3)$$

如上所述，因为 u_2 的边值由初值决定，再由(3.3)定出 u_1 的初值，从而定出 u_1 在区域内的值. 条件(3.3)相当于

$$(1-\alpha)\varphi - (1+\alpha)\psi = 0. \qquad (3.4)$$

由此可知

$$\alpha = -1, \varphi = 0; \alpha = 1, \psi = 0. \qquad (3.5)$$

设初始条件为

$$u(x,0) = f(x) = [f_1(x), f_2(x)]'. \quad (x > 0) \qquad (3.6)$$

我们用 Lax-Wendroff 格式来解此问题：

$$u(t+k) = L_\omega u(t) = [I + \lambda A(E - E^{-1})/2 + \lambda^2 A^2(E - 2I + E^{-1})/2]u(t). \qquad (3.7)$$

此地 $u(t)=u(x,t)=[u_1(x,t), u_2(x,t)]'$, $\lambda=k/h<1/c$. 此时边界条件及初始条件可书为形式：

$$u_1(0,t) = \alpha u_2(0,t), u(x,0) = f(x). \qquad (3.8)$$

但是格式(3.7)如果不用某种方式给出 $u_2(0,t)$，则不可能求出计算解. 例如要用下式作为边界计算条件：

$$u_2(0,t) = \beta u_2(h,t). \qquad (3.9)$$

现在寻求 Godunov-Ryabenkii 条件，设

$$u(x_j,t_n) = z^n\varphi(x_j), \varphi = [\varphi_1, \varphi_2]'. \qquad (3.10)$$

代入到(3.7)得 $z^{n+1}\varphi(x_j)=z^n L_\omega\varphi(x_j)$，即

$$z\varphi(x) = L_\omega\varphi(x). \qquad (3.11)$$

展开之得

$$z\begin{Bmatrix}\varphi_1(x_j)\\\varphi_2(x_j)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varphi_1(x_j)\\\varphi_2(x_j)\end{Bmatrix}+\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}-c,0\\0,c\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_1(x_{j+1})-\varphi_1(x_{j-1})\\\varphi_2(x_{j+1})-\varphi_2(x_{j-1})\end{Bmatrix}$$
$$+\frac{\lambda^2}{2}\begin{bmatrix}c^2,0\\0,c^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_1(x_{j+1})-2\varphi_1(x_j)+\varphi_1(x_{j-1})\\\varphi_2(x_{j+1})-2\varphi_2(x_j)+\varphi_2(x_{j-1})\end{Bmatrix}, \tag{3.12}$$

即

$$\begin{cases}z\varphi_1(x_j)=\varphi_1(x_j)-\lambda c[\varphi_1(x_{j+1})-\varphi_1(x_{j-1})]/2+\lambda^2c^2[\varphi_1(x_{j+1})\\-2\varphi_1(x_j)+\varphi_1(x_{j-1})]/2,\\z\varphi_2(x_j)=\varphi_2(x_j)+\lambda c[\varphi_2(x_{j+1})-\varphi_2(x_{j-1})]/2+\lambda^2c^2[\varphi_2(x_{j-1})\\-2\varphi_2(x_j)+\varphi_2(x_{j-1})]/2.\end{cases} \tag{3.13}$$

令 $\varphi_1(x_j)=\mu_1^j,\varphi_2(x_j)=\mu_2^j$ 代入上式得：

$$\begin{cases}z\mu_1=\mu_1-\lambda c(\mu_1^2-1)/2+\lambda^2c^2(\mu_1-1)^2/2;\\z\mu_2=\mu_2+\lambda c(\mu_2^2-1)/2+\lambda^2c^2(\mu_2-1)^2/2.\end{cases} \tag{3.14}$$

设上式的两根各为(μ_{11},μ_{12})，(μ_{21},μ_{22})则(3.11)的通解为：

$$\varphi(x_j)=[a_1\mu_{11}^j+a_2\mu_{12}^j,b_1\mu_{21}^j+b_2\mu_{22}^j]'. \tag{3.15}$$

Godunov-Ryabenkii 条件：在 L_2 的函数空间中，对于差分格式(3.7)的初边值问题：

$$\begin{cases}u(t+k)=[I+\lambda A(E-E^{-1})/2+\lambda^2A^2(E-2I+E^{-1})/2]u(t),\\u_1(0,t)=\alpha u_2(0,t),u_2(0,t)=\beta u_2(h,t).\end{cases} \tag{3.16}$$

的解(3.15)。对于$|z|>1$，要从(3.15)选取这样的特征值使满足$\|\varphi\|_h^2=\sum_{j=0}^{\infty}|\psi(x_j)|^2h<\infty$的解不存在.

对于$|z|\geqslant1$，考察(3.14)的特征值，可证明下列结果：

定理 1 设方程$(3.14_{1,2})$的特征值分别为 μ_{11},μ_{12}及 μ_{21}，μ_{22}. 对于 $c>0$ 满足下列关系：

$$\begin{cases}|\mu_{11}| < 1, (|z| \geqslant 1, z \neq 1), \mu_{11} = 1, (z = 1); \\ |\mu_{12}| \geqslant 1 + \delta. \quad (|z| \geqslant 1)\end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases}|\mu_{21}| \leqslant 1 - \delta, (|z| \geqslant 1); |\mu_{22}| > 1, (|z| \geqslant 1, z \neq 1), \\ \mu_{22} = 1. \quad (z = 1)\end{cases} \tag{3.18}$$

证 由于(3.14)为耗散格式，故当 $|\mu|=1, \mu\neq 1$ 时，$|z|<1$. 因此得当 $|z|\geqslant 1, z\neq 1$ 时不可能有 $|\mu|=1$ 的根. ($\mu=1, z=1$ 除外)由(3.14)当 $|z|\to\infty$时，必有一根 $\mu_{11}\to 0$. 故由根关于系数的连续性，可知有一根 $|\mu_{11}|<1$. ($|z|\geqslant 1, z\neq 1$)而且可证当 z 由 $|z|>1$ 趋于 1 时 $\mu_{11}\to 1$. 再由 $\mu_{11}\mu_{12}=(1+\lambda c)/(1-\lambda c)>1$ 可知 $|\mu_{12}|\geqslant 1+\delta, |z|\geqslant 1$. (3.17)证毕. 由(3.14)可知 μ_{1i}, μ_{2j}互为倒数关系，由此立即得到(3.18). 定理 1 证毕.

由(3.14)展开后得

$$\begin{cases}\lambda c(\lambda c - 1)\mu_1^2 + 2(1 - z - \lambda^2 c^2)\mu_1 + \lambda c(\lambda c + 1) = 0. \\ \lambda c(\lambda c + 1)\mu_2^2 + 2(1 - z - \lambda^2 c^2)\mu_2 + \lambda c(\lambda c - 1) = 0.\end{cases} \tag{3.19}$$

又可书为形式：

$$\begin{cases}\mu_1^2 + 2(1 - z - \lambda^2 c^2)/(\lambda c(\lambda c - 1))\mu_1 + (\lambda c + 1)/(\lambda c - 1) = 0, \\ \mu_2^2 + 2(1 - z - \lambda^2 c^2)/(\lambda c(\lambda c + 1))\mu_2 + (\lambda c - 1)/(\lambda c + 1) = 0.\end{cases} \tag{3.20}$$

由(3.19)，(3.20)两式可知 μ_{11}, μ_{12}同 μ_{22}, μ_{21}是互为倒数关系. 再由 $|\mu_{11}\mu_{12}|=(1+\lambda c)/(1-\lambda c)>1$ 故若 $|\mu_{11}|<1$ 必有 $|\mu_{12}|\geqslant 1+\delta>1$. 因此当 $|z|>1$ 时，为了使(3.16)通解满足 $\|\varphi\|_h<+\infty$. 我们必须只选取小于 1 的特征根. 由(3.17)，(3.18)可知(3.15)中系数 a_2, b_2 必为零. 故有

$$\varphi(x_j) = \{a_1(\mu_{11}(z))^j, b_1(\mu_{21}(z))^j\}. \tag{3.21}$$

为了满足条件 $u_1(0,t)=\alpha u_2(0,t), u_2(0,t)=\beta u_2(h,t)$. 把(3.21)代入得

$$\begin{cases} a_1 - \alpha b_1 = 0, \\ (1-\beta\mu_{21})b_1 = 0, \end{cases} \text{或} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1-\beta\mu_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 0. \tag{3.22}$$

由此马上可知由于 $|z|>1$, $|\mu_{21}|<1-\delta$. 如果选取 $|\beta|\leqslant 1$,则(3.22)的第二条件即不满足,这时只有 $a_1=b_1=0$,故当 $|z|>1$ 时不存在形式为 $u(x_j,t_n)=z^n\varphi_j$ 的解. 这就是 Godunov-Ryabenkii 条件. 这个条件的代数形式为

$$\mathrm{Det}J(z) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1, & -\alpha \\ 0, & 1-\beta\mu_{21}(z) \end{pmatrix} \neq 0, (|z|>1) \tag{3.23}$$

或书为形式

$$|\beta| \leqslant 1. \tag{3.24}$$

在 $|z|\geqslant 1$ 时,由(3.17),(3.18)可知当 $|z|>1$ 时,通解 $\varphi(x)\in L_2$,这是因为 $|\mu_{11}|<1$, $|\mu_{21}|<1-\delta$. 而且当 $|z|=1, z\neq 1$ 时,也由(3.17),(3.18)可知 $|\mu_{11}|<1$, $|\mu_{21}|\leqslant 1-\delta$. 故在 $|z|\geqslant 1, z\neq 1$ 时虽有 $|\beta|\leqslant 1$,也不允许有满足边界条件的非零解. (因 $a_1=b_1=0$)现在令 $z\to 1$,由(3.21)可知

$$\varphi(z,1) = \{a_1\mu_{11}(1)^j, b_1\mu_{21}(1)^j\}. \tag{3.25}$$

但由(3.17),(3.18)可知这时 $\mu_{11}(1)=1$. 因此要使 $\|\varphi\|_h^2$ 属于 L_2,必有 $a_1=0$,因此在 $|\beta|\leqslant 1, z=1$ 时形式为(3.25)的有界解也必须不存在($a_1=0$). 综合上述分析得

定理 2 在条件 $|\beta|\leqslant 1$ 下,若不存在下列的非零解:

①$|z|\geqslant 1, z\neq 1$ 属于 L_2 的解(3.21).

②$z=1$ 时属于 L_2 的解(3.21).

则差分格式(3.7),(3.8),(3.9)为稳定.

注　本定理与§2定理1及定理2同是§4定理1的原始形式，为了避免重复，只证§4定理1，其它从略.(参看[1]§8.3)

§4　一般双曲型方程组初边值问题的稳定性理论

现考虑常系数一阶双曲型偏微分方程组

$$\partial u/\partial t = A\partial u/\partial x,\quad (x \geqslant 0, t \geqslant 0) \tag{4.1}$$

其中 $u(x,t)=[u^{(1)}(x,t),\cdots,u^{(n)}(x,t)]'$ 是实变数 (x,t) 的向量函数. A 为 n 阶常矩阵. 一般均假定为对角阵，对于此模型问题一般作下列假定：

假定1　A为非奇异对角阵，未知函数 $u^{(v)}(x,t)$ 已次序化使 A 具有下列形式：

$$A = \begin{pmatrix} A^{I} & 0 \\ 0 & A^{II} \end{pmatrix}, A^{I} = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_L \end{bmatrix}, A^{II} = \begin{bmatrix} a_{L+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

其中

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_L < 0 < a_{L+1} \leqslant \cdots \leqslant a_n. \tag{4.3}$$

现研究(4.1)的初边值问题的差分方法，并设初值为 $u(x,0)\equiv f(x)$ 而边值条件已知为

$$u^{I}(0,t) = Su^{II}(0,t), \tag{4.4}$$

其中 u^{I}，u^{II} 均依 A 的分部而定义的. 即

$$u^{I} = (u^{(1)},\cdots,u^{(L)})', u^{II} = (u^{(L+1)},\cdots,u^{(n)})'.$$

S 为已给 $L\cdot(n-L)$ 矩阵. 已知在 L_2 空间中，上述问题是适定，即若微分方程对于所提的初边值问题的解是存在而且唯一，则称为适定的问题.

§4.1 **若干假定与定理** 现用差分方程解上述的初边值问题. 引入时间步长 $k>0$ 及空间步长 $h>0$. 把 x 轴分割为长为 h 的若干区间,设 $k/h=\lambda$ 为网格比. 并用记号 $x_\nu=\nu h, v_\nu(t)=v(x_\nu,t)$. 现用下列相容的常系数线性差分格式逼近微分方程(4.1).

$$\begin{cases} v_\nu(t+k)=Qv_\nu(t), v_\nu(0)=f_\nu, (\nu=1,2,\cdots) \\ Q=\sum_{j=-r}^{p} A_j E^j, Ev_\nu=v_{\nu+1}, \end{cases} \tag{4.5}$$

其中 Q 是常系数线性算子,A_j 是 n 阶常数矩阵,一般是 A 的多项式. 应用付氏分析法,(或用 $v_j^n=z^n x^j$ 代入(4.5))得特征方程式 $P(z,x)=z-\sum A_j x^j=z-Q(x)=0$,其中 A_j 为矩阵,x 为标量. 今后均用 $P(z,x)=0$ 代表基本内点格式的特征方程.

假定 2 设 $p\geqslant 1, A_p, A_{-r}$ 非奇.

设:

$$\hat{Q}(\xi)=\sum_{j=-r}^{p} A_j e^{ij\xi}, (\xi \text{ 实数}, i=\sqrt{-1}, x=e^{i\xi}) \tag{4.6}$$

表示 Q 的增长矩阵. 此后常把格式 Q 经过付氏变换 $v_j^n=z^n x^j$ 后所得的格式用 $\hat{Q}$ 表示. 对于 $\hat{Q}$ 尚要求:

假定 3 存在一个常数 $\delta>0$ 及一个自然数 $s>0$,使对于一切满足 $0\leqslant|\xi|\leqslant\pi$ 的 ξ,$\hat{Q}(\xi)$的特征值 $\mu(\xi)$满足估什式

$$|\mu(\xi)|\leqslant 1-\delta|\xi|^{2s}. \tag{4.7}$$

满足上述假定 3 的差分逼近(4.5)称为耗散. 由于差分格式的增长矩阵 $\hat{Q}(\xi)$的特征模小于 1,因此误差不会无限振动,故称为耗散. 关系式(4.7)又可述为对 $P(z,x)=0$ 的解满足 $|x|=1, x\neq 1\Rightarrow|z|<1$,其中"$\Rightarrow$"的意义为"可推出".

称差分格式为酉格式:若特征方程式 $P(z,x)=0$ 的根满足关系 $|x|=1\Rightarrow|z|=1$.

假定 4　$|Q(\xi)|\leqslant 1$.

这个假定保证了差分格式(4.5)对于纯初值问题为柯西稳定,(定义见§1中定义1.1)它又可述为对于特征方程式$P(z,x)=0$的解满足关系:若$|x|=1\Rightarrow|z|\leqslant 1$.若混合初边值问题稳定,则必要条件为纯初值问题稳定.因为可以视为一个边界趋于∞而得到.

由(4.5)所定义的Q,因此只有在边界上的$V_\nu,\nu=0,-1,\cdots -r+1$的值给定后,才能应用.因此边值条件具有形式:

$$v_\nu(t)=\sum_{j=1}^{\cdot}C_{\nu j}v_j(t).\ (\nu=0,-1,\cdots,-r+1) \qquad (4.8)$$

其中C_{ν}是n阶常数矩阵.这类的边界条件又称为由外推法而得到的边界条件.

假定 5　差分格式(4.5)同微分方程(4.1)的解是相容的.

相容性概念:设微分方程式(4.1)的解具有某光滑阶数,当把它代入差分格式(4.5)后,并按无穷小量k,h在(x,t)点作泰罗展开.关于h或k的各阶(至少一阶)系数必须为零.这些关系式称为相容条件.它反映了差分格式同微分方程的近似程度.也反映了差分格式系数同微分方程系数之间的关系.若代入(4.5)后,余项包含了k^{p+1}(或h^{p+1})项,就称为差分格式具有p阶精度.又称为差分格式同微分方程有p阶相容.不难由计算证明(4.1),(4.5)具有零阶相容条件为$\sum A_j=1$.

现在的目的是要推出稳定的代数条件.并用H表示网格函数ω_ν的空间,网格函数空间中的元素均用ω_ν,或v_ν,或g_ν等表示,并对于$\nu>-r$时满足边界条件(4.8),而且$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\omega_\nu|^2h<\infty$,即H为满足边界条件又属于$L_2$的函数空间.

现把差分逼近书为算子形式

$$v(t+k)=Gv(t),\quad (v(t),v(t+k)\in H) \qquad (4.9)$$

其中 G 为(4.5)所定义的有界线性算子(也就是前面的线性算子 Q).现在易于推出一个稳定的必要条件：

引理 4.1　稳定的一个必要条件就是对于算子 G,不存在 $|z_0|>1$的特征值 z_0.

证　设 G 有一个 $|z_0|>1$ 的特征值 z_0,即把 $v_\nu^n=z_0^n g_\nu$ 代入(4.9)后存在一个 $g\in H$,使

$$\hat{Q}g = z_0 g, \quad (g \in H) \tag{4.10}$$

其中 $\hat{Q}$ 是(4.9)经过变换 $v_\nu^n=z_0^n g_\nu$ 后的相应结果.由于 $v_\nu^n=z^n g_\nu$ 是(4.9)的解,它的初值属于 H.因此它依时间步数因 $|z|>1$ 而指数式增加,故不稳定.所以稳定时,必不存在 $|z_0|>1$ 的特征值 z_0. 证毕.

现在叙述判别稳定性的充分条件,并考虑广义的特征值问题.

引理 4.2　若把 $v_\nu^n=z^n x^\nu \varphi$ 代入(4.5)所得的格式用下式表示:$\hat{Q}\varphi=\sum\limits_{j=-r}^{p} A_j x^j \varphi = z\varphi$ 并设差分逼近为耗散的.则对于$\forall\ z: |z|\geq 1, z\neq 1$ 存在 nr 个特征值 x_j 满足 $|x_j|<1$,np 个特征值 $|x_j|>1$. 而且不存在 $|x_j|=1$ 的特征值.

证　特征值是下列特征方程式的解

$$\mathrm{Det}\left|\sum_{j=-r}^{p} A_j x^j - zI\right| = 0. \tag{4.11}$$

若 $x=e^{i\xi}\neq 1$(即 $|x|=1, x\neq 1$)但由耗散性质,可得 $|\hat{Q}(\xi)|<1$,故 $\hat{Q}(\xi)$的特征值当 $|z|\geq 1$ 时不等于 z. 由于相容性 $\sum A_j=I$,故当 $z\neq 1$ 时 $x\neq 1$. 因为特征值是关于 z 的连续函数,故可决定当 $|x_j|<1$ 的特征值 x 的个数,只要令 $|z|$ 取适当大的值即可. 但当 $|z|\to\infty$ 时,这些特征值趋于零. 因为 $\sum A_j x^j$ 的最低阶项为 $A_{-r}x^{-r}$,由假定 A_{-r}非奇,故有 nr 个特征值趋于零. 由连续性,有 nr 个根 $|x|<1$. 又因为 A_p 也非奇,最高阶数为$(p+r)n$. 故有 np 个特征值 $|x|$

>1. 证毕.

设$|z_0|\geq 1, z_0\neq 1$ 是一个固定值,要在 H 空间中决定(4.10)的解 g,即满足等式

$$\begin{cases}(\dot{Q}-z_0I)g_\upsilon = 0, & (\upsilon = 1,2,\cdots)\\ g_\upsilon = \sum\limits_{j=1}^{\cdot} C_{\upsilon j}g_j, & (\upsilon = 0, -1,\cdots,-r+1)\end{cases} \tag{4.12}$$

方程式$(4.12)_1$是常系数差分方程式,其一般解可书为形式:

$$g_\upsilon = g_\upsilon(z_0) = \sum_{|x_j|<1} P_j(\upsilon,\sigma)x_j^\upsilon(z_0). \tag{4.13}$$

其中 x_j 是(4.11)当$|x_j|<1$ 的解,$P_j(\upsilon,\sigma)$是关于 υ 的多项式,它的系数为 σ_j. υ 的次数是对应 x_j 的重数低一阶. 因此(4.13)具有 nr 个参数 $\sigma_j(j=1,\cdots,nr)$. 把(4.13)代入到边界条件$(4.12)_2$,得 nr 个线性齐次方程组,具有 nr 未知数 σ_j,其系数是 j 及 x_j^υ 的代数多项式. 系数组成的矩阵记为 $J(z_0)$,故可书为形式

$$J(z_0)\sigma = 0,(\sigma = (\sigma_1,\cdots,\sigma_{nr})') \tag{4.14}$$

其中 $J(z_0)$为 nr 阶矩阵,故得:

引理 4.3 对于$|z_0|\geq 1, z_0\neq 1$ 的 z_0 当只当 $\mathrm{Det}J(z_0)=0$ 时才是 G 的特征值.

换言之,若 $\mathrm{Det}J(z_0)\neq 0$,则 z_0 必非 G 的特征值. 现在考虑(4.13)当 $z_0\to 1$ 时的解,此时

$$g_\upsilon(1) = \sum P_j(\upsilon,1)(x_j(1))^\upsilon. \tag{4.15}$$

这时也依赖于 nr 个参数 σ_j,在一般情形下,$g_\upsilon(1)$不属于 H,因为 $x_j(1)=1$. 把(4.15)代入到边界条件后得:

$$J(1)\sigma = 0. \tag{4.16}$$

定义 4.1 若(4.16)有非平凡的解,则 $z_0=1$ 称为 G 的广义特征值.

当 $\mathrm{Det}J(1)=0$ 时,则称对应的解(4.15)为广义的特征函数.

定理 1　(参看[4]中 P. 707, H. O. Kreiss 主定理)若下列条件满足,则初边值问题为稳定.

(1)若假定 1—4 满足.

(2)$z_0=1$ 不是 G 的广义特征值,(即 $\mathrm{Det}J(1)\neq 0$)

(3)对于 $|z_0|\geq 1, z_0\neq 1$,G 不存在特征值 z_0.(即 $\mathrm{Det}J(z_0)\neq 0$)

定理 1 的证明见 §4.3

§4.2　G 的预解方程

对于方程(4.9),$V(t+k)=GV(t), V\in H$ 的解可书为形式:

$$v(t)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} z^n(G-zI)^{-1}dzv(0),(t=nk) \qquad (4.17)$$

其中 Γ 为包含 G 的谱的闭曲线,$(G-zI)^{-1}$ 为 $G-zI$ 的逆算子.

证　$$Gv(t)=Gv(t_n)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} z^n G(G-zI)^{-1}dzv(0)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint z^n(G-zI)(G-zI)^{-1}dzv(0)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint z^{n+1}(G-zI)^{-1}dzv(0).$$

但 z^n 为解析函数,故有 $\oint z^n dz=0$,最后得:

$$v(t+k)=v^{n+1}=-\frac{1}{2\pi i}\oint z^{n+1}(G-zI)^{-1}dzv(0)=Gv^n=Gv(t).$$

证毕.

设 $v=z^n\hat{v}$ 代入(4.9)记为 $G\hat{v}=z\hat{v}$,或 $(G-zI)\hat{v}=0$. 设方程 $(G-zI)\hat{v}=g$,若对于每一个 g 有唯一的解 $\hat{v}$ 的对应 z 称为 G 的正则值. 对于 $(G-zI)\hat{v}=0$,除了 $\hat{v}=0$ 外,尚有另外解 $\hat{v}$,则所对应的 z 称为 G 的特征值. G 的非正则值全体称为 G 的谱. 而 Γ 是包含 G 的谱的闭曲线. $(G-zI)^{-1}$ 称为 G 的预解算子. 现计算预解算子,即求解

$$v = (G - zI)^{-1}g, \quad v \in H. \tag{4.18}$$

或书为隐式形式

$$(G - zI)v = g. \tag{4.19}$$

由于 $Gv_\upsilon = \sum_{j=-r}^{p} A_j v_{\upsilon+j} = zv_\upsilon + g_\upsilon (\upsilon = 1, 2, \cdots)$ 展开后得 $A_{-r}v_{\upsilon-r} + \cdots + A_p v_{\upsilon+p} - zv_\upsilon = g_\upsilon$，故得 $v_{\upsilon+p} = -A_p^{-1}(\sum_{j=-r}^{p-1} A_j v_{\upsilon+j} - zv_\upsilon - g_\upsilon)$. 现引入辅助的 Banach 空间，其元素为

$$y_\upsilon = (v_{\upsilon+p-1}, \cdots, v_{\upsilon-r})'. \tag{4.20}$$

代入上式得

$$y_{\upsilon+1} = My_\upsilon + G_\upsilon, \quad (\upsilon = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.21}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} -A_p^{-1}A_{p-1} & \cdots & A_p^{-1}(A_0 - zI) & \cdots & -A_p^{-1}A_{-r} \\ I & & 0 & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & & & & \\ 0 & & & I & 0 \end{bmatrix}, G_\upsilon = A_p^{-1} \begin{bmatrix} g_\upsilon \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

由于 $v \in H$，即

$$v_\upsilon = \sum_{j=0}^{*} C_{j\upsilon} v_j. \quad (\upsilon = 0, -1, \cdots, -r+1) \tag{4.23}$$

故经过变换(4.20)后得

$$L_j y = 0. \quad (j = 1, \cdots, nr) \tag{4.24}$$

另一方面，我们可以证明，特征方程式 $\mathrm{Det}\left|\sum_{j=-r}^{p} A_j x^j - zI\right| = 0$ 的特征值 x 即 M 的特征值.

证　由 $\mathrm{Det}(M - xI) = 0$ 得

$$\begin{bmatrix} -A_p^{-1}A_{p-1}-x, & -A_p^{-1}A_{p-2} & \cdots & -A_p^{-1}(A_0-zI) & \cdots & -A_p^{-1}A_{-r} \\ I & -x & & & & 0 \\ \cdots\cdots & & & & & \\ 0 & 0 & & & I & -x \end{bmatrix} = 0$$

用 x 乘第一列加到第二列，再用 x 乘第二列加到第三列…等等类推，得

$$\begin{bmatrix} -A_p^{-1}A_{p-1}-x, & -A_p^{-1}A_{p-2}-xA_p^{-1}A_{p-1}-x^2 & \cdots \\ I & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & I \\ \cdots\cdots & -[A_p^{-1}A_{-r}+A_p^{-1}A_{-r+1}x+\cdots+A_p^{-1}A_{p-1}x^{p+r-1}+x^{p+r}] & \\ \cdots\cdots & 0 & \\ \cdots\cdots & 0 & \end{bmatrix}$$

故由上式行列式为零得 $\sum_{j=-r}^{p} A_j x^j = zI$. 因此 x 即 $\mathrm{Det}\left|\sum A_j x^j - zI\right| = 0$ 的根. 证毕.

在格式为耗散的情形下，对于 $|z| \geq 1, z \neq 1$, M 的特征值 $x_j = x_j(z)$ 是 z 的函数. 由引理 4.2，可得它分开为两组 s_1 及 s_2; s_1: $|x_j| < 1$, s_2: $|x_j| > 1$. 故得下列引理:

引理 4.4 在格式为耗散的情形下，对于 $|z| \geq 1, z \neq 1$ 存在一个非奇矩阵 $T = T(z)$. 关于 z 为解析的，并使

$$T(z)MT^{-1}(z) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

其中 M_{11} 是 nr 阶矩阵，其特征值 $|x_j| < 1$，而 M_{22} 为 np 阶矩阵，其特征值为 $|x_j| > 1$.

(4.25)称为 M 的典型分解式. 现由(4.21)引入变换

$$\omega_\nu = T(z)y_\nu. \tag{4.26}$$

由 $T(z)y_{\nu+1} = TMT^{-1}(Ty_\nu) + TG_\nu$ 得

$$\omega_{\nu+1} = \begin{vmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{vmatrix} \omega_\nu + TG_\nu. \qquad (4.27)$$

因此属于 L_2 的 ω_ν 的一般解为

$$\begin{cases} \omega_j^{I} = \sum_{\nu=1}^{j-1} M_{11}^{j-\nu-1}(TG_\nu)^{I} + M_{11}^{j-1}\omega_1^{I}, (j = 2,3,\cdots) \\ \omega_j^{II} = -\sum_{\nu=j}^{\infty} M_{22}^{j-\nu-1}(TG_\nu)^{II}, (j = 1,2,\cdots) \end{cases} \qquad (4.28)$$

其中 ω^{I}, ω^{II} 是依据 TMT^{-1} 分部而得.

(4.28)的证明,由(4.27)得

$$\omega_{\nu+1}^{I} = M_{11}\omega_\nu^{I} + TG_\nu^{I}, \omega_{\nu+1}^{II} = M_{22}\omega_\nu^{II} + TG_\nu^{II}. \qquad (4.29)$$

对于(4.29)第一式反复迭代后得

$$\omega_j^{I} = M_{11}\omega_{j-1}^{I} + TG_{j-1} = M_{11}(M_{11}\omega_{j-2}^{I} + TG_{j-2}^{I}) + TG_{j-1}^{I}$$
$$= M_{11}^2\omega_{j-2}^{I} + (M_{11}TG_{j-2}^{I} + TG_{j-1}^{I}) = \cdots$$
$$= M_{11}^{j-1}\omega_1^{I} + \sum_{\nu=1}^{j-1} M_{11}^{j-\nu-1}(TG_\nu)^{I}, \text{即}(4.28_1).$$

其次由 $\omega_{j+1}^{II} = M_{22}\omega_j^{II} + TG_j^{II}$ 故得

$$\omega_j^{II} = M_{22}^{-1}(\omega_{j+1}^{II} - TG_j^{II}) \text{反复迭代之得}$$
$$= M_{22}^{-1}[M_{22}^{-1}(\omega_{j+2}^{II} - TG_{j+1}^{II}) - TG_j^{II}]$$
$$= (M_{22}^{-1})^2\omega_{j+2}^{II} - [(M_{22}^{-1})^2TG_{j+1}^{II} + M_{22}^{-1}TG_j^{II}] = \cdots$$
$$= (M_{22}^{-1})^N\omega_{N+j}^{II} - \sum_{\nu=j}^{j+N-1} M_{22}^{j-\nu-1}(TG_\nu^{II}).$$

由于 $\omega \in L_2$,故 $\omega_\alpha^{II} \to 0 (\alpha \to \infty)$ 故得

$$\omega_j^{II} = -\sum_{\nu=j}^{\infty} M_{22}^{j-\nu-1}(TG_\nu^{II}) \quad \text{即}(4.28_2)\text{证毕}.$$

现应用(4.26),(4.28)代入(4.24)得

$$L_jT^{-1}\omega = D_j\omega = 0. \quad (j = 1,\cdots,nr)$$

然后由(4.28)消去 ω_j^{I} 只余下 ω_1^{I},故得

$$C_1(z)\omega_1^1 = \sum_{j=1}^{s+1} F_j(z)\omega_j^1 + H_j(z)G_j, \qquad (4.30)$$

其中 $C_1(z)$, $F_j(z)$, $H_j(z)$ 是关于 z 为解析的. ($|z|\geqslant 1, z\neq 1$)(4.26),(4.27),(4.28),(4.30)组成了(4.18)的解. 即预解算子(4.18)的解. 设 R 表示如下的区域:

R: $|z|\geqslant 1$, $z\neq 1$.

引理 4.5 设 $z_0\in R$,若 z_0 不是 G 的特征值,则 $(G-z_0I)^{-1}$ 在 H 中存在而且有界.

证 (1)若 $C_1(z)^{-1}$ 存在,则由(4.28),(4.30)及引理 4.4 可知 $(G-zI)^{-1}$ 在 H 中存在、唯一决定而且有界.

(2)若 $C_1(z)^{-1}$ 不存在,现证明此情况不会发生. 若 C_1^{-1} 不存在即 $|C_1(z)|$ 为奇异故 $C_1(z)\omega_1^1=0$ 有异于零的非平凡解 ω_1^1,则当

$$TG_v=0, \quad \omega_j^1=0, \quad \omega_j^1=M_{11}^{j-1}\omega_1^1, \quad C_1(z)\omega_1^1=0, \qquad (4.31)$$

时 ω_1^1 为(4.28),(4.30)的解. 即齐次方程(4.27)有非平凡的解. 由引理 4.4,可知(4.19)有解,因此 z_0 是齐次方程(4.19)的 G 的特征值. 这同定理中假定 z_0 不是 G 的特征值相矛盾. 故此情况必不发生. 即 $C_1(z)$ 的逆存在. 引理 4.5 证毕.

引理 4.6 若 G 在 R($|z|\geqslant 1, z\neq 1$)中没有特征值,则对于任意常数 $\rho>0$,存在 $\varepsilon>0$ 使 $|(G-zI)^{-1}|$ 在 $|z|\geqslant 1-\varepsilon$, $|z-1|=\rho$ 中一致有界.

证 因为正则集为开集,因此若 $(G-z_0)^{-1}$ 在 z_0 存在有界,则在 z_0 的邻域中 $(G-zI)^{-1}$ 也存在有界. 故在 $|z|>1-\varepsilon$, $|z-1|\geqslant\rho$ 中 $(G-zI)^{-1}$ 也存在有界.

§4.3 定理 1 的证明

先叙述一个引理.

引理 4.7 存在一个数 $\rho>0$ 及一个非奇异矩阵 $T(z)$,它对于 $|z-1|\leqslant\rho$, $|z|>1$ 把 M 化成典型形式:

$$T(z)MT^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \hat{M}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{M}_{22} \end{pmatrix}, \qquad (4.32)$$

其中 $\hat{M}_{11}$具有$|x_j|<1$ 的特征值，$\hat{M}_{22}$具有$|x_j|>1$ 的特征值.

证 已知 M 的特征值即下列特征方程的解：

$$\sum_{j=-r}^{p} A_j x^j \varphi = z\varphi. \qquad (4.33)$$

现由 $\sum_j A_j v(x_v + jh, t) = v(x_v, t+k)$，关于 jh，k 展为泰罗级数后得 $\sum_j A_j(v(x_v) + jh\partial v/\partial x + j^2h^2(\partial^2 v/\partial x^2)/2 + \cdots) = v(x_v,t) + k\partial v/\partial t + k^2(\partial^2 v/\partial t^2)/2 + \cdots = v(x_v,t) + kA\partial v/\partial x + k^2A^2(\partial^2 v/\partial x^2)/2 + \cdots$
故得相容条件为

$$\sum_j A_j = I, \ \sum_j jA_j = \lambda A, \ \sum_j j^2 A_j = \lambda^2 A^2, \ \lambda = k/h. \qquad (4.34)$$

现应用上述相容条件得 $\sum_j A_j(x^j - 1)\varphi = (z-1)\varphi$，再令 $x = 1 + \triangle x$ 代入上式得 $\sum A_j(j\triangle x + (j^2/2)\triangle x^2 + \cdots)\varphi = (z-1)\varphi$. $(\lambda A(x-1) + (\lambda^2/2)A^2(x-1)^2 + \cdots)\varphi = (z-1)\varphi$，令 $\mu = (x-1)/(z-1)$代入上式得$[\lambda A\mu + \mu^2(z-1)D(\mu(z-1))]\varphi = \varphi$. 注意，第一项为对角阵，故其特征值为$(z-1)$的函数，故得

$$\mu_j = (\lambda a_j)^{-1} + O((z-1)^{\frac{1}{n}}). \qquad (4.35)$$

其中含有$(z-1)^{1/n}$是由于求 n 阶矩阵的特征值时，一般要开 n 次方根的结果. 故得：

$$x_j = 1 + (z-1)\mu_j = 1 + (z-1)/(\lambda a_j) + O((z-1)^{1+\frac{1}{n}}). \qquad (4.36)$$

因此得

$$|x_j| < 1, (j = 1,\cdots,L, a_j < 0); \ |x_j| > 1. (j = L+1,\cdots,n, a_j > 0) \qquad (4.37)$$

由引理 4.2,我们可知,当$|z|>1$时,保持严格不等式成立.特别当$z=1$时,$x_j=1$,但其中有 L 个由小于 1 趋于 1,有 $n-L$ 个由大于 1 趋于 1.现在,我们考虑在 $z=1$ 点的一个邻域,故存在解析变换 $T_1(z)$把 M 变为下列典型形式:

$$T_1(z)MT_1(z)^{-1}=\begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{pmatrix},$$

其中 M_{11}的特征值是严格小于 1,这样的特征值,称为内根,而 M_{33}的特征值是严格大于 1,这样的特征值称为外根,而 M_{22}为 n 阶矩阵,当$|z|$由大于 1 趋于 1 时,其中有 L 个的特征值是由小于 1 而趋于 1,也称为内根,而 $n-L$ 个特征值是由严格大于 1 而趋于 1,也称为外根.故存在变换 T_2 使 $T_2M_2T_2^{-1}$ 变为分块典型形式.使其中的 L 阶矩阵的特征值是由小于 1 而趋于 1,而 $n-L$ 阶矩阵的特征值是由大于 1 而趋于 1.故可由

$$T_3=\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_b \end{pmatrix}$$

而得变换 T_3T_1,把 M 变为典型形式(4.32),引理 4.7 证毕.

定理 1 的证明(一)由于定理的条件是当$|z|\geqslant 1, z\neq 1$时,G 不具有特征值.故由引理 4.6 可知$|(G-zI)^{-1}|$在$|z|\geqslant 1-\varepsilon$,$|z-1|=\rho$中一致有界.并存在小于 1 的正数 ε,ρ 使差分格式的解可书为形式:

$$v(t)=G^n v(0)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} z^n(G-zI)^{-1}v(0)dz, \quad (4.38)$$

其中

$$\begin{cases} \Gamma_1: & |z|=1-\varepsilon, \quad (\text{大弧}) \\ \Gamma_2: & |z-1|=\rho, \quad \Gamma_3: \quad |z|=1-\varepsilon, \quad (\text{小弧}) \end{cases} \quad (4.39)$$

由引理 4.6 可知在 Γ_1 上 $(G-zI)^{-1}$ 有界. 故得

$$\| -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} z^n (G - zI)^{-1} v(0) dz \| \leqslant K(1-\varepsilon)^n \| v(0) \|_h. \tag{4.40}$$

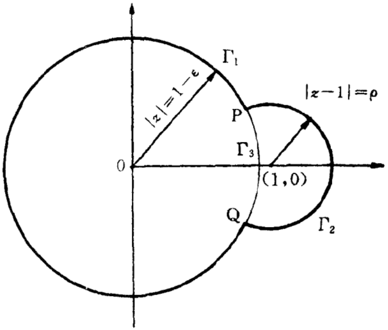


图 一

(二)现在来估计 Γ_2 上的积分. 由于 $z=1$ 不是广义特征值，故在 Γ_2 附近，均为 G 的正则值，即沿 Γ_2: $(G-zI)^{-1}$ 是有界的. 这只要取 ε 很小，$\rho\neq 0$ 即得. 故有 $|(G-zI)^{-1}|<K$. 余下来是沿 Γ_2 的解析函数 z^n 的积分，$\int z^n dz = ((z)_P^{n+1} - (z)_Q^{n+1})/(n+1)$. 但在 P,

Q 点 $|z^{n+1}|_P=(1-\varepsilon)^{n+1}$, $|z^{n+1}|_Q=(1-\varepsilon)^{n+1}$,均为有界量,因此沿 Γ_2 得

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} z^n (G - zI)^{-1} v(0) dz \right\|_h \leqslant k^* \| v(0) \|_h. \quad (4.41)$$

定理 1 证毕.

第二章 纯初值问题柯西稳定性判别法及G.K.S.稳定性理论简介

§1 在原点两边具有不同网格形式的差分格式的耦合柯西稳定性及其判别法

§1.1 不均匀空间网格的差分格式的稳定性

现考虑双曲型偏微分方程式差分逼近的柯西稳定问题，并在不同区域中应用不同的网格形式及不同的差分格式. 现把此问题重新阐述并化为初边值问题. 因此可用 H. O. Kreiss 的 L_2 稳定的理论作稳定分析. 在用有限差分格式逼近偏微分方程式时，解在有些局部地区出现了很大的梯度. 在此问题上，必须应用不同形式的网格，又称为网格加细问题. 主要问题在于不同形式网格的区间中，要应用相容的差分格式以及适当联接条件，使不至于引入不稳定现象，也不至于对计算格式引起精度次数的损失.

§1.2 问题的叙述

现考虑下列初值问题：

$$u_t = \alpha u_x, \quad u(x,0) = \varphi(x). \quad (t \geqslant 0, -\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

其中 α 为常数，u 及 φ 为标量函数. 现考虑两个网格型式的差分逼近. 在原点的右边步长为$\triangle x_1$，左边步长为$\triangle x_2$，设 $p=\triangle x_1/\triangle x_2$.

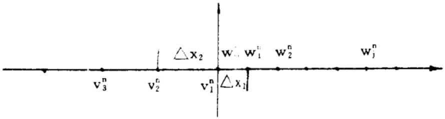


图 二

设右边网格比左边细，即 $0<p<1$. $w_j^n=u(x_j,t_n)=u(j\triangle x_1,n\triangle t)$, $j=1,2,\cdots,n=0,1,2,\cdots$，并用 Lax–Wendroff 格式逼近于(1.1)

$$w_j^{n+1}=(b_1^2-b_1)w_{j-1}^n/2+(1-b_1^2)w_j^n+(b_1^2+b_1)w_{j+1}^n/2. \quad (1.2)$$

$$(b_1=\alpha\triangle t/\triangle x_1, j=1,2,\cdots,n=0,1,2,\cdots)$$

在原点的另一边用 $v_j^n=u(-(j-1)\triangle x_2,n\triangle t)$ $(j=0,1,\cdots,n=0,1,2,\cdots)$ 而且

$$v_j^{n+1}=(b_2^2+b_2)v_{j-1}^n/2+(1-b_2^2)v_j^n+(b_2^2-b_2)v_{j+1}^n/2. \quad (1.2')$$

$$(b_2=\alpha\triangle t/\triangle x_2<b_1, j=0,1,\cdots,n=0,1,2,\cdots)$$

现在用向量记号

$$z_j^n=\begin{pmatrix}w_j^n\\ v_j^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u(j\triangle x_1,n\triangle t)\\ u(-(j-1)\triangle x_2,n\triangle t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}j=0,1,2\cdots\\ n=0,1,2\cdots\end{pmatrix} \quad (1.3)$$

而且有 $w_0^n=v_1^n$，因此网格细化格式可书为

$$z_j^{n+1}=\begin{pmatrix}(b_1^2-b_1)/2 & 0\\ 0 & (b_2^2+b_2)/2\end{pmatrix}z_{j-1}^n+\begin{pmatrix}1-b_1^2 & 0\\ 0 & 1-b_2^2\end{pmatrix}z_j^n$$
$$+\begin{pmatrix}(b_1^2+b_1)/2 & 0\\ 0 & (b_2^2-b_2)/2\end{pmatrix}z_{j+1}^n, \quad (1.4_a)$$

$$(j=1,2,\cdots,n=0,1,2,\cdots,)$$

其中 $b_2=\alpha\triangle t/\triangle x_2=(\alpha\triangle t/\triangle x_1)\cdot(\triangle x_1/\triangle x_2)=b_1p$. 实则由于 $w_0^n=v_1^n$ 及 v_1^n 尚未求出，因此在每时间步对于 $u(0,t)$（即 v_1^n 或 w_0^n）尚要求其逼近式. 为了推出中间介面联接条件，很自然地，在 $x=0$ 点要求有二阶精度的差分格式，即差分格式依泰罗展开后，误差为 $O((\triangle x)^3)$ 或 $O((\triangle t)^3)$. 应用泰罗展开式，可以推导出包含有三点的非对称的二阶精度格式. 因此应用将 v_0^n 表示为 w_1^n，v_1^n 及 v_2^n 的二阶外推公式. 得到如下的相容中介面二阶精度联接条件：

$$w_0^n=v_1^n, v_0^n=\alpha_1 w_1^n+\alpha_2 v_1^n+\alpha_3 v_2^n.$$

其中 $\alpha_1=2/(p(p+1))$，$\alpha_2=2(p-1)/p$，$\alpha_3=(1-p)/(1+p)$. ($p=\triangle x_1/\triangle x_2$) 具有二阶精度的证明；由 $v_0^n=u(\triangle x_2)$，$w_1^n=u(\triangle x_1)=u(p\triangle x_2)$，$v_1^n=u(0)$，$v_2^n=u(-\triangle x_2)$ 代入 $u(\triangle x_2)=\alpha_1 u(p\triangle x_2)+\alpha_2 u(0)+\alpha_3 u(-\triangle x_2)$，应用泰罗展开式得 $u(0)+\triangle x_2(\partial u/\partial x)_0+(\triangle x_2)^2(\partial^2 u/\partial x^2)_0/2+\cdots=\alpha_1[u_0+p\triangle x_2(\partial u/\partial x)_0+p^2(\triangle x_2)^2(\partial^2 u/\partial x^2)_0/2+\cdots]+\alpha_2 u(0)+\alpha_3[u_0-\triangle x_2(\partial u/\partial x)_0+(\triangle x_2)^2(\partial^2 u/\partial x^2)_0/2+\cdots]$. 比较两边 $\triangle x_2$ 的系数得 $1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$1=\alpha_1 p-\alpha_3$，$1=\alpha_1 p^2+\alpha_3$，即 $\alpha_1=2/(p(p+1))$，$\alpha_2=2(p-1)/p$，$\alpha_3=(1-p)/(1+p)$. 故为二阶精度，证毕.

现把边界条件书为矩阵形式：

$$z_0^n=\begin{pmatrix} w_0^n \\ v_0^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1^n \\ v_1^n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_2^n \\ v_2^n \end{pmatrix}. \ (n=0,1,\cdots) \tag{1.4b}$$

系统 I　(1.4a), (1.4b).　　(1.5)

由于 $\partial w/\partial t=a\partial w/\partial x_1$，$\partial v/\partial t=a\partial v/\partial x_2=-a(\triangle x_1/\triangle x_2)\cdot(\partial v/\partial x_1)=-ap(\partial v/\partial x_1)$. 可以看到，差分方程式系统 I 是下列微分方程的逼近：$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix} \alpha, & 0 \\ 0, & -\alpha p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_x$. 其相容条件为 $w(0,t)=v(0,t)$. 对

于上述形式的初边值问题，H. O. Kreiss（参见第一章§4 中定理1)已得出判别稳定性的代数条件.

引理 1.1 差分格式 $v^{n+1}=Gv^n$ 为稳定的，如果(1)满足第一章中§4 的假定 1 到假定 4.(2)对于 $|z|\geqslant 1$，$\mathrm{Det}J(\tau(z))=0$ 可得出具有 $L+1$ 个绝对值等于 $1(|\tau|=1)$ 的外特征值.(即外根)

证 由第一章§4 得知把 $V^{n+1}=GV^n$ 的内点格式的特征方程式 $p(z,\tau)=0$ 的内根($|\tau|\leqslant 1$，内根、外根定义见第一章§4.3)的线性组合，组合系数为 $\sigma=[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\cdots]'$ 代入边界条件后得 $J(\tau(z))\sigma=0$. 若 $\mathrm{Det}J(\tau(z))\neq 0$ 则为稳定. 又其次，可知当 $a>0$ 时 $(z,x)=(1,1)$ 为外根.(见第一章定理 1，公式(3.18))若 $\mathrm{Det}J(\tau(z))=0$ 可推出 $|\tau|=1$ 或 $\tau=1$ 的外根. 那么对于内根 $\tau(|\tau|\leqslant 1)$ 一定有 $\mathrm{Det}J(\tau(z))\neq 0$. 因此为稳定，证毕.

§1.3 网格加细格式的稳定性

在本节中，证明系统Ⅰ(1.5)是稳定的. 并引入加细后为稳定的中介面条件.

定理 1.1 系统Ⅰ(1.5)是关于柯西问题(1.1)($0<b_1<1$，$b_1=\alpha(\triangle t/\triangle x_1)$)稳定的差分逼近.

证 由于 $|b_1|<1$，及关于第一章§4 中的假定 1 到假定 4 均为满足，又已知 Lax－Wendroff 格式是耗散稳定格式. 为了证明系统Ⅰ(1.5)的稳定性，先求加细问题差分格式(1.4a)的特征方程式，令

$$Z_j^n=z^n g_j,\ \sum_{j=1}^{\infty}|g_j|^2<+\infty,\ (|z|\geqslant 1,g_j=\tau^j)\qquad(1.6_a)$$

代入(1.4_a)得两个特征方程式

$$z=(b_i^2+(-1)^i b_i)/2\tau_i+(1-b_i^2)$$
$$+(b_i^2+(-1)^{i+1}b_i)\tau_i/2.\quad(i=1,2)\qquad(1.7)$$

设 τ_1 为(1.7) $i=1$ 的内根，τ_2 为(1.7) $i=2$ 的内根. 故 g_j 取形式

$$g_j(z)=\begin{Bmatrix}\beta_1\tau_1^j\\ \beta_2\tau_2^j\end{Bmatrix}.\quad (\beta_i\text{ 为常数})\qquad (1.6_b)$$

代入(1.4_b)后得

$$(a)\beta_1=\beta_2\tau_2,\quad (b)\alpha_1\beta_1\tau_1+\alpha_2\beta_2\tau_2+\alpha_3\beta_2\tau_2^2=\beta_2.\qquad (1.8)$$

消去 β_1,β_2 后得 $1=\alpha_1\tau_1\tau_2+\alpha_2\tau_2+\alpha_3\tau_2^2$ 再把 α_i 代入后得

$$p(1-p)\tau_2^2+2\tau_1\tau_2+2(p^2-1)\tau_2-p(1+p)=0.\ (1.9)$$

对于(1.7)中 $i=1,2$ 两式，令其相等，消去 z 得 $(b_1^2-b_1)/2\tau_1+(1-b_1^2)+(b_1^2+b_1)\tau_1/2=(b_2^2+b_2)/2\tau_2+(1-b_2^2)+(b_2^2-b_2)\tau_2/2$ 乘以 τ_1,τ_2，再应用 $b_2=pb_1$ 即得：

$$2b_1^2(1-p^2)\tau_1\tau_2+\tau_1[p^2b_1^2+pb_1+(p^2b_1^2-pb_1)\tau_2^2$$
$$-(b_1^2+b_1)\tau_1\tau_2]-(b_1^2-b_1)\tau_2=0.\qquad (1.10)$$

由(1.9)(1.10)两式中消去 τ_1，经过复什计算后得：

$$(b_1^2-b_1)p^2(p^2-1)(\tau_2-1)^4=0.$$

由此可知若 $\mathrm{Det}J(\tau)=0$ 得 $\tau_2=1$，由(1.9)可知 $\tau_1=1$. 但是当 $\alpha>0$ 时 $\tau_1=1$ 是外根，由引理 1.1 可知为稳定的.

现在提出另外两个中介面联接条件. 其稳定性也易于验证. 在高阶逼近中是经常用到的.

$$v_0=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{m}{j}v_j,\qquad (1.11)$$

其中 $v_j=v(j\triangle x)=u(-j\triangle x_2,n\triangle t)$. $(j=0,1,2,\cdots)$因此 $v_0^n=w_0^n$.

系统 I (1.4_a)，(1.11).　(1.12)

定理 1.2　系统 I (1.12)是(1.1)当 $\alpha<0$ 的稳定差分逼近. 当 $\alpha>0$ 时，将(1.11)中 v 改为 w，则也为稳定.

证　当 $\alpha<0$，$Z_j^n=z^n(\beta_1\tau_1^j,\beta_2\tau_2^j)'=(w_j^n,v_j^n)'$代入到(1.11)得 $(1-\tau_2)^m=0$，$\therefore\tau_2=1$，但当 $\alpha<0$ 时 $\tau_2=1$ 为外根(见第一章公式(3.17)，(3.18)，并注意到 v 所逼近的微分方程为 $v_t=-\alpha pv_x$)

由引理 1.1 可知其为稳定的.

$\alpha>0$，代入(1.11)′(即 v 改为 w 的格式)得 $(1-\tau_1)^m=0$. $\therefore \tau_1=1$. 但 $\alpha>0$, $\tau_1=1$ 为外根(参看第一章公式(3.17),(3.18)并注意到 v 及 w 所逼近的微分方程式不同). 故由引理 1.1 可知为稳定. 证毕.

因此,选取适当中介面联接条件,对于稳定性是有利的,不论 $\alpha>0,\alpha<0$ 均如此. 我们可取 $p=\triangle x_1/\triangle x_2=1/M$. M 为正整数. 对于系统 I 可知 $v_0^n=w_M^n$,$(n=0,1,2,\cdots)$如果边界联接条件取为 $w_0^n=v_1^n, v_0^n=w_M^n$,即

$$\begin{pmatrix} w_0^n \\ v_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^n \\ v_1^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_M^n \\ v_M^n \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

系统Ⅱ　　(1.4.),(1.13).　　(1.14)

定理 1.3　系统Ⅱ(1.14)是对于(1.1)的稳定的差分逼近.

证　设解取为形式

$$(w_j^n, v_j^n)' = \lambda^n(\beta_1\tau_1^j, \beta_2\tau_2^j)'$$

代入(1.13)$w_0^n-v_1^n=0, v_0^n-w_M^n=0$ 得 $\beta_1-\beta_2\tau_2=0, \beta_2-\beta_1\tau_1^M=0$. 书为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tau_2 \\ -\tau_1^M & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = J(\tau) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0,$$

故得 $\mathrm{Det}J(\tau)=(1-\tau_2\tau_1^M)$. 由于 $\alpha<0, |\tau_1|\leqslant 1$, $|\tau_2|<1$; $\alpha>0$, $|\tau_1|<1, |\tau_2|\leqslant 1$. 因此 $\mathrm{Det}J(\tau)\neq 0$. 故为稳定,证毕.

总之,对于在原点两边不同网格形式变粗或加细的网格,两边均用相同的 L－w 格式,只要选取适当的中介面联接条件,由定理 1.1,1.2,1.3 可知在整体上能使其变为纯初值问题的柯西稳定.

§1.4　差分格式的耦合与稳定

这里讨论关于原点两旁的两个不同的稳定耗散格式的自然耦

合条件[2]. 基本方法为把这两个格式重新排列并阐述为等价的初边值问题，然后用 H. O. Kreiss 方法检验其稳定的代数条件. 由于微分方程的解关于某些区域具有很大梯度，及不连续性，才提出网格加细的技巧. 它对于计算大梯度的函数是很有效的. 这又称为锋面效应. 而处理这锋面效应除了网格加细外尚有格式耦合的技巧. 就是更改差分格式以适应锋面效应. 格式耦合技巧比网格加细更为有效.

本节中考虑两个差分格式的耦合 L_2 稳定，即关于原点两侧应用不同差分格式的自然耦合问题. [2]处理方法与网格加细相同. 即重新安排格式系统并阐述为初边值稳定性判别问题，故可应用 H. O. Kreiss关于初边值问题稳定性判别的代数条件.

§1.5 主要定理及证明

现考虑如下的双曲型方程式柯西问题

$$u_t = Au_x + Bu_y + Cu_z, \quad u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z). \tag{1.15}$$

$(-\infty < x, y, z < \infty, t \geqslant 0)$为简单计，设 u 及 φ 为标量，$B=C=0$. 设网格为 $x_j = j\triangle x, t_n = n\triangle t, j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots; n=0,1,2,\cdots$，设(1.15)的差分逼近为：

$$v_j^{n+1} = Q_1 v_j^n = \sum_{\alpha=-r_1}^{p_1} C_\alpha^{(1)} v_{j+\alpha}^n, \tag{1.16$_a$}$$

$$u_j^{n+1} = Q_2 u_j^n = \sum_{\alpha=-r_2}^{p_2} C_\alpha^{(2)} u_{j+\alpha}^n. \tag{1.16$_b$}$$

其中 $c_\alpha^{(i)} = c_\alpha^{(i)}(b), b = A\triangle t/\triangle x$. r_i, p_i 为正整数. 设 Q 为下列格式所定义：

$$z_j^{n+1} = Qz_j^n = \begin{cases} Q_1 z_j^n, & (j = 1,2,\cdots) \\ Q_2 z_j^n. & (j = 0, -1, -2,\cdots) \end{cases} \tag{1.17}$$

则称为 Q_1 及 Q_2 相耦合. 得下列结果：

若 Q_1, Q_2 为耗散稳定格式，则 Q 必为 L_2 稳定. 我们将在后面

证明这个结果（见定理 1.4），此处我们设为显式格式，当然对于隐式格式也有这样结果. 为了分析问题并化为等价的初边值问题，现把 Q_2 格式折叠为关于 x 轴正方向的格式，定义 $w_j^n = u_{-j+1}^n$（同时 b 改为 $-b$）所以

$$u_{-j}^{n+1} = \sum_{e=p_2}^{-r_2} C_e^{(2)}(b) u_{-j+e}^n, \quad (j=0,1,2,\cdots)$$

$$u_{-j+1}^{n+1} = \sum_{e=p_2}^{-r_2} C_e^{(2)}(b) u_{-j+1+e}^n$$

$$= \sum_{e=-p_2}^{r_2} C_e^{(2)}(b) u_{-j+1-e}^n. \quad (j=1,2,\cdots).$$

令 $u_{-i+1} = w_i$ 得

$$\begin{cases} w_j^{n+1} = \sum\limits_{e=-p_2}^{r_2} C_e^{(2)}(-b) w_{j+e}^n = Q'_2 w_j^n, \\ Q'_2 = \sum\limits_{e=-p_2}^{r_2} C_e^{(2)}(-b) E^e. \quad (j = 1,2,\cdots) \end{cases} \tag{1.18}$$

由于 $v_j^n = u(jh, n\tau)$，$w_j^n = u(-(j-1)h, n\tau)$. 故在中介面上有下列相互交叉联接关系式.

$$\begin{cases} w_{-j+1}^n = v_j^n, & (j = 1,2,\cdots,p_2) \\ v_{-j+1}^n = w_j^n. & (j = 1,2,\cdots,r_1) \end{cases} \tag{1.19}$$

例如对于 $p_2 = r_1 = 2$ 时有

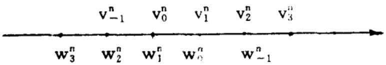


图 三

现在重新安排耦合格式系统，使其重新阐述为初边值问题的等价系统．引入记号：

$$Z_j^n = [v_j^n, w_{-j}^n]'. \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.20}$$

因此耦合格式可书为下列形式：

$$Z_j^{n+1} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q'_2 \end{pmatrix} Z_j^n, \quad (j = 1, 2, \cdots; n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.21}$$

因此中介面联接条件(1.19)书为

$$Z_{-j}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z_{j+1}^n. \quad (j = 0, \cdots, r-1) \tag{1.22}$$

（即 $v_{-j}^n = w_{j+1}^n, w_{-j}^n = v_{j+1}^n$）其中 $r = \mathrm{Max}(r_1, p_2)$．但此时(1.21)，(1.22)是逼近于微分方程式：

$$Z_t = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} Z_x, u(0,t) = w(0,t). \tag{1.23}$$

但初边值问题差分逼近(1.21)，(1.22)的 L_2 稳定判别法已由 H. O. Kreiss 给出，即第一章§4 的定理 1($\mathrm{Det}J(\tau) \neq 0$)即它不具有下列形式的特征解：

$$Z_j^n = z^n g_j, \quad \sum g_j^2 < \infty. \ (|z| \geqslant 1, z \neq 1) \tag{1.24}$$

也不存在 $z=1$ 的广义特征解．

定理 1.4 若由(1.16_a)，(1.16_b)所定义的格式 Q_1、Q_2 分别为稳定的并关于(1.1)为相容耗散逼近格式，则 Q_1、Q_2 的耦合格式 Q：(1.21)，(1.22)也为初边值问题稳定．

证 由(1.24)求 Q_1, Q'_2 的特征值，即求

$$z = \sum_{\alpha=-r_1}^{p_1} C_\alpha^{(1)}(b)\tau_1^\alpha, \tag{1.25}$$

$$z = \sum_{a=-p_2}^{r_2} C_a^{(2)}(-b)\mu_i^a, \qquad (1.26)$$

的内根. $|\tau|\leqslant 1$, $|\mu|\leqslant 1$, ($|z|\geqslant 1$, $z\neq 1$)由于耗散性, 故(1.25)有 r_1 个内根, $|\tau|<1$. 而没有 $|\tau|=1$ 的内根. (因若 $|\tau|=1$, $\tau\neq 1\Rightarrow |z|<1$, 而且 $z=1$, $\tau=1$ 是外根.)同理 Q_2 为耗散, 故 $|\mu|<1$, 也不存在 $|\mu|=1$ 的内根. 否则, $|\mu|=1$, $\mu\neq 1\Rightarrow |z|<1$ 的原故. 虽 $\mu=1$, $z=1$ 为 Q'_2 的内根, 但 $\mu\neq\tau$. 特征方程的解可表示为形式:

$$Z_j^n = z^n \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{d_1} f_i(j)\tau_i^j, \\ \sum_{i=1}^{d_2} h_i(j)\mu_i^j. \end{Bmatrix} \quad (|z|\geqslant 1, z\neq 1) \qquad (1.27)$$

其中 τ_i 是(1.25)的相异 m_i 重内根. $f_i(j)$ 是关于 j 的 m_i-1 次多项式. μ_i 是(1.26)的相异 l_i 重根, $h_i(j)$ 是关于 j 的 l_i-1 次多项式. 而且 $\sum_{i=1}^{d_1} m_i = r_1$, $\sum_{i=1}^{d_2} l_i = p_2$. 把(1.27)的 Z_j^n 代入到边界条件(1.22)得:

$$\sum_{i=1}^{d_1} f_i(-j)\tau_i^{-j} - \sum_{i=1}^{d_2} h_i(j+1)\mu_i^{j+1} = 0. \qquad (1.28_a)$$

$$\sum_{i=1}^{d_1} f_i(j+1)\tau_i^{j+1} - \sum_{i=1}^{d_2} h_i(-j)\mu_i^{-j} = 0. \ (j=0,\cdots,r-1)$$

$$(1.28_b)$$

上述两式联合书为形式:

$$\sum_{i=1}^{d_1} f_i(j)\tau_i^j - \sum_{i=1}^{d_2} h_i(-j+1)(\mu_i^{-1})^{j-1} = 0. \qquad (1.29)$$

$$(j=-r+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,r)$$

换句话说, 其系数组成了关于 $(\tau_i)^j$, $(u_m^{-1})^{j-1}$ 的范得蒙行列式. 因为 $|\tau_i|<1$, $|\mu_m|<1$ 则 $\tau_i\mu_m\neq 1$. 又若 $|\tau_i|=1$, $\tau_i\neq 1\Rightarrow |z|<1$. 故由 Q_1、Q_2 为耗散而不存在 $|\tau_i|=|\mu_m|=1$ 的根, 除了 $\tau_i=\mu_m=1$ 外.

但$(z,\tau)=(1,1)$为外根，故在排除之列. 因此不可能有$\tau_i=\mu_m=1$的内根. 故$\mathrm{Det}J(\tau)\neq 0$. 故为稳定. 定理 1.4 证毕.

§2 G.K.S.稳定性理论简介

在本节中，简单介绍初边值问题 G.K.S. 稳定性理论，详细证明从略.（参看[5]）

§2.1 问题的提出

现考虑下列双曲型偏微分方程式：

$$\partial u/\partial t = A\partial u/\partial x + F(x,t). \quad (0\leqslant x<\infty,\ 0<t) \quad (2.1)$$

其中$u(x,t)$,$F(x,t)$为 n 维向量.

$$A=\begin{bmatrix} A^{I} & 0 \\ 0 & A^{II} \end{bmatrix}. \quad (A^{I}<0, A^{II}>0) \quad (2.2)$$

其中A^{I}、A^{II}意义参看第一章 §4 公式(4.2),(4.3). 初始及边界条件为

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x), & (0\leqslant x<\infty) \\ u^{I}(0,t)=Su^{II}(0,t)+g(t). & (t>0) \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 S 的意义见第一章 §4 公式(4.4).

现用下列网格函数：

$$V_\nu(t)=v(x_\nu,t). \quad \begin{bmatrix} x_\nu=\nu h, \nu=-r+1,\cdots,0,1,2,\cdots \\ t_\tau=\tau k, \tau=s,s+1,\cdots \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

其中 h 为空间步长，k 为时间步长. 并应用相容的多步差分方法：

$$\begin{cases} Q_1 v_\nu(t+k) = \sum_{\sigma=0}^{s} Q_\sigma v_\nu(t-\sigma k) + kF_\nu, \\ Q_\sigma = \sum_{j=-r}^{p} A_{j\sigma} E^j, E v_\nu = v_{\nu+1}. \ (\nu = 0,1,2,\cdots) \end{cases} \tag{2.5}$$

初值及边界条件为

$$v_\nu(\sigma k) = f_\nu(\sigma k), (\sigma = 0,1,\cdots,s, \nu = -r+1, -r+2,\cdots) \tag{2.6}$$

$$v_\nu(t+k) = \sum_{\sigma=-1}^{s} s_\sigma^{(\nu)} v_1(t-\sigma k) + g_\nu(t), (\nu = -r+1,\cdots,0) \tag{2.7}$$

$$s_\sigma^{(\nu)} = \sum_{j=0}^{q} C_{j\sigma}^{(\nu)} E^j. \tag{2.8}$$

§2.2 稳定性定义

设网格函数 u_ν, v_ν 的内积定义为：

$$\begin{cases} (u,v)_x = \sum_{\nu=-r+1}^{\infty} u_\nu^* v_\nu h, \quad \| u \|_x^2 = (u,u)_x, \\ (u,v)_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} u^*(t_\tau) v(t_\tau) k, \quad \| u \|_t^2 = (u,u)_t, \\ (u,v)_{xt} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{\nu=-r+1}^{\infty} u_\nu^*(t_\tau) v_\nu(t_\tau) hk, \quad \| u \|_{xt}^2 = (u,u)_{xt}. \end{cases} \tag{2.9}$$

并设第一章§4.1中的假定1-4仍成立.

稳定性定义 2.1 （柯西稳定，参看[5]定义3.1）考虑差分格式(2.5)-(2.7)，设 $g_\mu = F_\nu = 0(\mu = -r+1,\cdots,0; \nu = 1,2,\cdots)$ 如果存在常数 $K_0 > 0, \alpha_0 \geq 0$ 使对于 $t = t_\tau = \tau k$，及一切 $\alpha > \alpha_0$. h 及 f 满足下列估计

$$\| e^{-\alpha t} v \|_x^2 \leqslant K_0^2 \sum_{\sigma=0}^{s} \| f(\sigma k) \|_x^2. \tag{2.10}$$

则差分格式(2.5)-(2.7)称为柯西稳定.

注 这就是第一章§1中的稳定性定义1.1的推广.

稳定性定义 2.2 (参看[5]定义3.2)设差分格式(2.5)-(2.7)及 $f_\upsilon(\sigma k)=0$,($\upsilon=-r+1,\cdots,\sigma=0,1,\cdots,s$)如果存在 $K_0>0,\alpha_0\geqslant 0$,对于 $t=t_\tau=\tau k$,及一切 $\alpha>\alpha_0$ 满足

$$\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{1+\alpha k}\right)^2\|e^{-\alpha t}v\|_{xt}^2\leqslant K_0^2\left[\begin{array}{l}\|e^{-\alpha(t+k)}F\|_{xt}\\ +\dfrac{1}{h}\displaystyle\sum_{\mu=-r+1}^{0}\|e^{-\alpha(t+k)}g_\mu\|_t^2\end{array}\right].\tag{2.11}$$

则差分格式(2.5)-(2.7)称为稳定.

稳定性定义 2.3 (G.K.S.稳定,参看[5]定义3.3)对于差分格式(2.5)-(2.7),设 $f(\sigma k)=0$.($\sigma=0,1,\cdots,s$)若对于常数 $K_0>0,\alpha_0\geqslant 0,t=t_\tau=k\tau$,及一切 $\alpha>\alpha_0$,如果下列关系式满足

$$\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{1+\alpha k}\right)\sum_{\upsilon=0}^{r+1}\|e^{-\alpha t}v_\upsilon\|_t^2+\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{1+\alpha k}\right)^2\|e^{-\alpha t}v\|_{xt}^2$$
$$\leqslant K_0^2\left[\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{1+\alpha k}\right)\sum_{\upsilon=-r+1}^{0}\|e^{-\alpha(t+k)}g_\upsilon\|_t^2+\|e^{-\alpha(t+k)}F\|_{xt}^2\right].\tag{2.12}$$

则称(2.5)-(2.7)为G.K.S.稳定.

§2.3 预解条件及G.K.S.稳定性判别法

应用付氏分析法,即令 $v_\upsilon^n=z^n\hat{v}_\upsilon$ 代入(2.5)-(2.7)得预解方程式:

$$(Q_1-\sum_{\sigma=0}^{s}z^{-\sigma-1}Q_\sigma)\hat{w}_\upsilon=\bar{F}_\upsilon,\quad(\upsilon=1,2,\cdots)$$
$$(\hat{w}_\upsilon-\sum_{\sigma=-1}^{s}z^{-\sigma-1}s_\sigma^{(\upsilon)}\hat{w}_1)=\bar{g}_\upsilon,\quad(\upsilon=-r+1,\cdots,0)\tag{2.13}$$

其中 z 为复数，$\hat{w}\in L_2$. 下列结果参看[5]中定理 4.1、4.2、4.3、5.3、5.4 及引理 5.1.

定理 2.1 差分格式(2.5)－(2.7)如果存在常数 $K_0>0$，$\alpha_0\geqslant 0$，使其预解方程(2.13)对于每一个 $|z|>e^{\alpha_0 k}$，$\hat{F}\in L_2$ 有唯一解，而且满足估计式：

$$\left(\frac{|z|-e^{\alpha_0 k}}{|z|}\right)^2\|\hat{w}\|_x^2\leqslant K_0^2\left(\|\hat{F}\|_x^2+k\sum_{\upsilon=-r+1}^{0}|\hat{g}_\upsilon|^2\right),\tag{2.14}$$

则差分格式(2.5)－(2.7)在定义 2.2 之下为稳定.

定理 2.2 差分格式(2.5)－(2.7)如果存在常数 $K_1>0$，$\alpha_0\geqslant 0$，使其预解方程式(2.13)对于每一个 $|z|>e^{\alpha_0 k}$，及一切 F，g，有唯一解，并满足估计式：

$$k\left(\frac{|z|-e^{\alpha_0 k}}{|z|}\right)\sum_{\upsilon=-r+1}^{0}|\hat{w}_\upsilon|^2+\left(\frac{|z|-e^{\alpha_0 k}}{|z|}\right)^2\|\hat{w}\|_x^2$$
$$\leqslant K_1\left[k\left(\frac{|z|-e^{\alpha_0 k}}{|z|}\right)\sum_{\upsilon=-r+1}^{0}|\hat{g}_\upsilon|^2+\|\hat{F}\|_x^2\right].\tag{2.15}$$

则差分格式(2.5)－(2.7)为 G.K.S. 稳定.

定理 2.3 差分格式(2.5)－(2.7)若对于 Q_σ 及 $S_\sigma^{(\mu)}$ 附加以关于含 k 的扰动项，则所得差分方程式的稳定性质不变.

现把预解方程式(2.13)书为形式：

$$\begin{cases}\sum_{j=-r}^{p}A_j(z)E^j\hat{w}_\upsilon=\hat{F}_\upsilon,\ A_j=A_{j-1}-\sum_{\sigma=0}^{s}z^{-\sigma-1}A_{j\sigma},\\ \hat{w}_\mu=\sum_{j=0}^{q}C_j(z)\hat{w}_{1+j}+\hat{g}_\mu,\ C_j=\sum_{\sigma=-1}^{s}z^{-\sigma-1}C_{j\mu}\end{cases}\tag{2.16}$$

$$(\upsilon=1,2,\cdots;\mu=-r+1,\cdots,0)$$

当 $\hat{F}=0$ 时(2.16)变为

$$\sum_{j=-r}^{p}A_j\hat{w}_{\upsilon+j}=0.\tag{2.17}$$

其特征方程式变为

$$\mathrm{Det}\left|\sum_{j=-r}^{p} A_j x^j\right| = 0. \tag{2.18}$$

对于$|z|\geqslant 1$,其内根为$|x_i|\leqslant 1$,则w_υ可表示为内根的线性组合:

$$w_\upsilon = \sum_{|x_j|\leqslant 1} p_j(\upsilon) x_j^\upsilon(z), \tag{2.19}$$

其中$p_j(\upsilon)$为υ的多项式,其次数是x_j的重根数减1.

定理 2.4 设$|z|\geqslant 1$,若格式(2.5)-(2.7)为耗散,则特征方程式(2.18)不存在$|x|=1, x\neq 1$的解.

证 由于耗散性若$|x|=1, x\neq 1$则$|z|<1$,故当$|z|\geqslant 1$时不存在$|x|=1, x\neq 1$的解.

注意,(2.19)的线性组合系数包含有 nr 参数,$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{nr})'$把(2.19)代入到边界条件$(2.16)_2$得(在齐次情形下)

$$J(x)\sigma = 0. \tag{2.20}$$

故在(2.16)为齐次的情形下有唯一零解的条件为$\mathrm{Det}J(x)\neq 0$. 即在齐次情形下,不存在特征值. 而且为 G. K. S. 稳定的.

定理 2.5 设$\eta>0$为任意常数,对于$|z|\geqslant 1+\eta$及$1\leqslant |z|\leqslant 1+\eta$若$\mathrm{Det}J(x(z))\neq 0$,则差分格式(2.5)-(2.7)为 G. K. S. 稳定.

定理 2.6 考虑双边值问题(2.5) $t\geqslant 0, 0\leqslant x\leqslant 1$. 若对应左半平面及右半平面问题,(即当一个边界趋于无限时)均为初边值问题 G. K. S. 稳定,则双边值问题也为稳定的.

这些定理证见[5] 此地从略. 其证明的主要思想就是第一章§4定理1(Kreiss 定理)的证明方法的推广. 由于 G. K. S. 稳定性定义2.3,本身便是柯西稳定定义的推广,因此证明原则上相似,但方法及具体细节复什得多. 此地从略.

不过有一点要指出的是:对于第一章§2的定理1,定理2中 Godunov-Ryabenkii 稳定性判别条件,及第一章§4的定理1中的

H. O. Kreiss 判别柯西稳定的判别条件，以及本章 §2 的定理 2.5 中的判别 G. K. S. 稳定性条件，这些条件均具有相同的代数形式，即

$$\mathrm{Det} J(z) \neq 0, \qquad (|z| \geqslant 1).$$

第三章　同内点无关的双曲型方程差分逼近的稳定性判别的简便方法

§1　同内点无关的双曲型方程初边值问题差分逼近的稳定性判别法

本节对于双曲型方程组 $u_t = Au_x + Bu + F\ (x \geqslant 0, t \geqslant 0)$. 初边值问题差分逼近的简便稳定性判别法作了若干的叙述. 差分逼近包含了基本内点格式及某一类边界条件，得到其判别法只同外流分量($A>0$)的边界条件有关，而且同基本格式无关. 在此节中，所讨论的差分逼近包含了任意的隐或显式的两层格式，多层格式及耗散或酉格式. 而边界条件具有更一般的形式. 在§1.2中作了初步的稳定性分析. 证明了差分逼近为稳定，当只当其外流主要部分($A>0$)为稳定. 因此整体稳定问题化为齐次外流标量部分的稳定性问题.

现在只考虑简化问题(即主要部分)的稳定性，而且限于边界条件为平移的情形，即对于所有点的边界条件有相同的系数. 这样的边界条件在实际上经常用到，特别是单点的边界条件，依定义就是平移的边界条件. 对于这样的平移情形下的主要部分稳定性判别方法，在§1.3中叙述，并在§1.5中证明. 实际上只同边界条件有关. 这就是同内点基本格式无关的判别法，这就是异于前述

G. K. S. 稳定性判别法的简便稳定性判别法.

本节均假定基本格式对于纯初值问题为柯西稳定，而且此格式均为可解. 这些基本假定对于稳定性明显地是必要条件. 例如在定理 1.4 及定理 1.5 中，说明了在边界条件为可解及满足 Von-Nenmann 条件以及一些附加的不等式条件之下，则简化问题为稳定. 如果基本格式为酉格式(即 $|x|=1\Rightarrow|z|=1$)那么尚要求边界条件为耗散. (即 $|x|=1, x\neq 1\Rightarrow|z|<1$. 其中"⇒"表示"可推出")

在这新的简便判别法之下，在 §1.3 继续讨论一些例子，并得到：若基本格式为二层及耗散的，则由水平外推所决定的外流边界条件均使整体格式为稳定. 奇怪的是，这格式对于多层格式是不成立的. 其次对于任意多层耗散基本格式如果外流边界条件是由斜外推，框形格式，右向尤拉格式，那么就保证了整体格式的稳定性. 若基本格式为耗散及酉格式，若外流部分边界条件是右向显式稳定尤拉格式，那整体格式一定是稳定.

§1.4 及 §1.5 中证明了 §1.3 的结果. 并指出，不难把这些稳定性概念推到双边界的情形. 实则，对于左边及右边的四分之一平面问题为稳定，(由[5]定理 5.4)则对于双边界问题也为稳定.

§1.1 差分逼近

现考虑一阶双曲型偏微分方程组

$$\partial u/\partial t = A\partial u/\partial x + Bu + F, \quad (x\geqslant 0, t\geqslant 0) \qquad (1.1_{\bullet})$$

其中 $u(x,t)$，$F(x,t)$ 均为 n 维向量，$F(x,t)$ 为已知的. A 及 B 为固定的 $n\times n$ 矩阵，而 A 是非奇的埃尔米特矩阵. 不失一般性之下，假定 A 为对角形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} A^{\text{I}} & 0 \\ 0 & A^{\text{II}} \end{pmatrix}, A^{\text{I}}<0, A^{\text{II}}>0, \qquad (1.2)$$

其中 A^{I} 及 A^{II} 各为 $L\times L$ 及 $(n-L)\times(n-L)$ 矩阵. 若给出初值：

$$u(x,0)=f(x),\quad (x\geqslant 0) \qquad (1.1_b)$$

及边界条件

$$u^{I}(0,t)=Su^{II}(0,t)+g(t),\quad (t\geqslant 0) \qquad (1.1_c)$$

则(1.1$_a$)的解是唯一决定，其中S是已知固定的$L\times(n-L)$矩阵，$g(x)$是已给的L－向量，而且

$$u^{I}=(u^{(1)},\cdots,u^{(L)})',u^{II}=(u^{(L+1)},\cdots,u^{(n)})', \qquad (1.3)$$

各表示对应于A的内流(A＜0)及外流(A＞0)未知量.为了应用差分逼近于初值问题(1.1$_a$)，现引入网格宽度$h=\triangle x>0,k=\triangle t>0$，使$\lambda=k/h=$常数.此后常用记号$v_\mu(t)=v(\mu h,t)=v(\mu h,t_n)=v(\mu h,nk)$并用下列常数双边一般多步基本格式来逼近(1.1$_a$)

$$\begin{cases}Q_{-1}v_\mu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma v_\mu(t-\sigma k)+kb_\mu(t),\\ (\mu=r,r+1,\cdots)\\ Q_\sigma=\sum_{j=-r}^{p}A_{j\sigma}E^j,\quad Ev_\mu=v_{\mu+1},\quad(\sigma=-1,\cdots,s)\end{cases} \qquad (1.4_a)$$

其中$A_{j\sigma}$是$n\times n$矩阵，它是A及kB的多项式，而$b_\mu(t)$是依赖于$F(x,t)$及其导数的某阶数光滑函数.为使(1.4$_a$)有唯一解，须要给出初值：

$$v_\mu(\sigma k)=v_\mu^0(\sigma k),\quad(\sigma=0,\cdots,s,\mu=0,1,\cdots) \qquad (1.4_b)$$

其中$v_\mu^0(\sigma k)$为已给定的初始函数.但此地，尚要在每一个时间层$t=\sigma k\geqslant sk$给出所需要的边值$v_\mu(t+k),(\mu=0,\cdots,r-1)$，它将由两组边界条件决定(参看[8]中§1,p.605－606)

$$\begin{cases}v_\mu^I(t+k)=\sum_{j=1}^{p}D_j^{II(\mu)}v_j^I(t+k)+ke_\mu^I(t),\\ (\mu=1,\cdots,r-1)\\ T_{-1}^{II(\mu)}v_\mu^I(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{q}T_\sigma^{II(\mu)}v_\mu^{II}(t-\sigma k)+ke_\mu^{II}(t).\end{cases} \qquad (1.4_c)$$

其中诸$D_j^{\mathrm{I\,I}(\mu)}$，$T_\sigma^{\mathrm{I\,I}(\mu)}$，$T_{-1}^{\mathrm{I\,I}(\mu)}$为已给的满足相容条件的矩阵.这是因为$v_\nu^{\mathrm{I}}(t+k)$可关于$v_0^{\mathrm{I}}(t+k)$的泰罗展开，系数为$v_0^{\mathrm{I}}(t)$关于x的各阶导数.再由(1.1.)可化为$v_0^{\mathrm{I}}(t+k)$关于t的各阶导数.故由$v_0^{\mathrm{I}}(t+k)=sv_0^{\mathrm{II}}(t+k)+g(t+k)$化为$v_0^{\mathrm{II}}(t+k)$关于t的各阶导数.再由(1.1.)可化为$v_0^{\mathrm{II}}(t+k)$关于x的各阶导数，再离散化后即得(1.4$_c$)的第一方程式.其次由$T_{-1}^{(\mu)}v_\nu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{q}T_\sigma^{(\mu)}v_\mu(t-\sigma k)+kd_\mu(t)$及$T_\sigma^{(\mu)}=\sum_{j=0}^{m}C_{j\sigma}^{(\mu)}E^j(\mu=0,\cdots,r-1;\sigma=-1,\cdots,q)$其中

$$C_{j\sigma}^{\mu}=\begin{pmatrix}C_{j\sigma}^{\mathrm{I\,I}(\mu)} & C_{j\sigma}^{\mathrm{I\,II}(\mu)}\\ C_{j\sigma}^{\mathrm{II\,I}(\mu)} & C_{j\sigma}^{\mathrm{II\,II}(\mu)}\end{pmatrix}$$

$C_{j\sigma}^{\mathrm{I\,I}(\mu)},\cdots,C_{j\sigma}^{\mathrm{II\,II}(\mu)}$等等均为满足相容条件的已给函数，对于第二组式子$T_{-1}^{\mathrm{II\,I}(\mu)}v_\mu^{\mathrm{I}}(t+k)+T_{-1}^{\mathrm{II\,II}(\mu)}v_\mu^{\mathrm{II}}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{q}[T_\sigma^{\mathrm{II\,I}(\mu)}v_\mu^{\mathrm{I}}(t-\sigma k)+T_\sigma^{\mathrm{II\,II}(\mu)}v_\mu^{\mathrm{II}}(t-\sigma k)]+ke_\mu^{\mathrm{II}}(t)$，其中$T_\sigma^{\mathrm{II}\alpha(\mu)}=\sum_{j=0}^{m}C_{j\sigma}^{\mathrm{II}\alpha(\mu)}E^j(\alpha=\mathrm{I},\mathrm{II};\mu=0,\cdots,r-1)$.应用(1.4$_c$)的第一式，消去$v_\mu^{\mathrm{I}}(t+k)$即得(1.4$_c$)的第二式.

§1.2 简化问题

差分逼近是由(1.4)所决定，其中的向量b_ν一般是由(1.1.)的F或其导数的组合而得到.因此或者是$b_\nu=F_\nu$，或者是b_ν是由(1.1.)中F及其某阶导数的逼近式.关于差分逼近式均依据第一二章中的有关假定.现讨论在G.K.S.意义下的稳定性.在下面的定理1.1中，简化上述差分逼近为外流标量分量(A>0)的齐次边界条件的差分逼近.并应用$\mathrm{Det}J(z)\neq0$，即G.K.S.稳定性判别方法，其中J(z)为把内点格式的内向特征解($|x|\leqslant1$)的线性组合代入到边界条件而得的方程式的系数矩阵.由[5]中定理4.3(即第二

章定理 2.3)可知这些稳定性判别方法均对于差分逼近的主要部分而不影响整体稳定性. 即略去 B 及其非齐次向量. 即我们只讨论 $b_\nu=d_\nu=e_\mu=g(t)=0$ 的格式(1.4). 换言之,此地只考虑下列简化形式的差分逼近.

$$\begin{cases} Q_{-1}v_\mu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma v_\mu(t-\sigma k), & (\mu=r,r+1,\cdots) \\ Q_\sigma=\sum_{j=-r}^{p}A_{j\sigma}E^j, Ev_r=v_{r-1}. & (\sigma=-1,\cdots,s) \end{cases} \tag{1.5$_a$}$$

其初始条件为

$$v_\mu(\sigma k)=\overset{0}{v}_\mu(\sigma k). \quad (\sigma=0,\cdots,s;\mu=0,1,\cdots) \tag{1.5$_b$}$$

而外流边界条件为:

$$\begin{cases} T_{-1}^{\mathrm{I}\,\mathrm{I}(\mu)}v_\mu^{\mathrm{I}}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{q}T_\sigma^{\mathrm{I}\,\mathrm{I}(\mu)}v_\mu^{\mathrm{I}}(t-\sigma k), \\ T_\sigma^{\mathrm{I}\,\mathrm{I}(\mu)}=\sum_{j=0}^{m}C_{j\sigma}^{\mathrm{I}\,\mathrm{I}(\mu)}E^j. \quad (\mu=0,1,\cdots,r-1) \end{cases} \tag{1.5$_c$}$$

内流边界条件为:

$$v_0^{\mathrm{I}}(t+k)=Sv_0^{\mathrm{I}}(t+k), \tag{1.5$_d$}$$

$$v_\mu^{\mathrm{I}}(t+k)=\sum_{j=1}^{p}D_j^{\mathrm{I}\,\mathrm{I}(\mu)}v_j^{\mathrm{I}}(t+k), \quad (\mu=1,\cdots,r-1). \tag{1.5$_e$}$$

而(1.5$_a$)相容于

$$\partial u/\partial t=A\partial u/\partial x. \tag{1.6}$$

而且 $A_{j\sigma}$及 $C_{j\sigma}^{\mathrm{I}\,\mathrm{I}(\mu)}$各是 A 及 $A^{\mathrm{I}\,\mathrm{I}}$的多项式. 因此得.

引理 1.1 当只当(1.5)的主要部分为稳定时,差分格式(1.4)为稳定.

现令 $A_{j\sigma}=\begin{bmatrix} A_{j\sigma}^{\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & A_{j\sigma}^{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$ $(j=-r,\cdots,p;\sigma=-1,\cdots,s)$并依据(1.2)的分部，在第二步把基本格式(1.5$_a$)及(1.5$_b$)分开为下列形式：关于内流部分：

$$\begin{cases} Q_{-1}^{\mathrm{I}} v_{\mu}^{\mathrm{I}}(t+k) = \sum\limits_{\sigma=0}^{s} Q_{\sigma}^{\mathrm{I}} v_{\mu}^{\mathrm{I}}(t-\sigma k), \ (\mu = r, r+1, \cdots) \\ Q_{\sigma}^{\mathrm{I}} = \sum\limits_{j=-r}^{p} A_{j\sigma}^{\mathrm{I}} E^{j}, \end{cases} \tag{1.7$_a$}$$

$$v_{\mu}^{\mathrm{I}}(\sigma k) = \overset{0}{v}{}_{\mu}^{\mathrm{I}}(\sigma k), \ (\sigma = 0, \cdots, s; \mu = 0, 1, \cdots) \tag{1.7$_b$}$$

$$\begin{cases} v_{0}^{\mathrm{I}}(t+k) = S v_{0}^{\mathrm{II}}(t+k), \\ v_{\mu}^{\mathrm{I}}(t+k) = \sum\limits_{j=1}^{\nu} D_{j}^{\mathrm{II}(\mu)} v_{j}^{\mathrm{II}}(t+k). \ (\mu = 1, \cdots, r-1) \end{cases} \tag{1.7$_c$}$$

以及外流部分：

$$\begin{cases} Q_{-1}^{\mathrm{II}} v_{\mu}^{\mathrm{II}}(t+k) = \sum\limits_{\sigma=0}^{s} Q_{\sigma}^{\mathrm{II}} v_{\mu}^{\mathrm{II}}(t-\sigma k), \ (\mu = r, r+1, \cdots) \\ Q_{\sigma}^{\mathrm{II}} = \sum\limits_{j=-r}^{p} A_{j\sigma}^{\mathrm{II}} E^{j}, \end{cases} \tag{1.8$_a$}$$

$$v_{\mu}^{\mathrm{II}}(\sigma k) = \overset{0}{v}{}_{\mu}^{\mathrm{II}}(\sigma k), \ (\sigma = 0, \cdots, s; \mu = 0, 1, \cdots) \tag{1.8$_b$}$$

$$\begin{cases} T_{-1}^{\mathrm{II}(\mu)} v_{\mu}^{\mathrm{II}}(t+k) = \sum\limits_{\sigma=0}^{q} T_{\sigma}^{\mathrm{II}(\mu)} v_{\mu}^{\mathrm{II}}(t-\sigma k), \\ T_{\sigma}^{\mathrm{II}(\mu)} = \sum\limits_{j=1}^{m} C_{j\sigma}^{\mathrm{II}(\mu)} E^{j}. \ (\mu = 0, \cdots, r-1) \end{cases} \tag{1.8$_c$}$$

由此(1.5)是由外流及内流部分所给定，即由内流(1.7)及外流(1.8)所决定. 很明显地(1.5)当只当两个分部为稳定时整体才稳

定. 可以看到，外流部分(1.8)是自封闭的. 即外流部分的求解只同外流部分的数据有关. 内流则否. 因为 $v_\mu^{\mathrm{I}}(t+k)$ 是由 $v_j^{\mathrm{I}}(t+k)$ 所决定. 当考虑稳定性问题时，可以只考虑简化的齐次边界条件问题而不影响其稳定性.

$$v_\mu^{\mathrm{I}}(t+k)=0. \quad (\mu=0,1,\cdots,r-1) \tag{1.9}$$

这样内流问题，也变为自封闭问题. (1.7$_{ab}$)，(1.9)，(1.8)构成了整体的稳定性问题(1.5). 因为 $A_{j\sigma}$ 及 $C_{j\sigma}^{\mathrm{II}(\mu)}$ (外流边界系数)是对角矩阵，故可书为

$$A_{j\sigma}=\mathrm{diag}(A_{j\sigma}),\ C_{j\sigma}^{\mathrm{II}(\mu)}=\mathrm{diag}(C_{j\sigma}^{(\mu)}).$$

故可以将(1.7)，(1.8)，(1.9)分开为 n 个标量支量，每个支量具有标量形式：

$$\begin{cases} Q_{-1}v_\mu(t+k)=\sum\limits_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma v_\mu(t-\sigma k), \ (\mu=r,r+1,\cdots) \\ Q_\sigma=\sum\limits_{j=-r}^{p}A_{j\sigma}E^j, \end{cases} \tag{1.10$_a$}$$

$$v_\mu(\sigma k)=\overset{0}{v}_\mu(\sigma k), \ (\sigma=0,\cdots,s;\mu=0,1,\cdots) \tag{1.10$_b$}$$

$$T_{-1}^{(\mu)}v_\mu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{q}T_\sigma^{(\mu)}v_\mu(t-\sigma k). \ (\mu=0,\cdots,r-1) \tag{1.10$_c$}$$

其中(1.10$_a$)是同(1.6)的一个分量，即同方程式

$$\partial u/\partial t=A\,\partial u/\partial x \quad (A\neq 0) \tag{1.11}$$

相容. 当内流时，(A<0)边界条件(1.10$_c$)变为

$$T_{-1}^{(\mu)}=1,T_\sigma^{(\mu)}=0. \ (\mu=0,\cdots,r-1;\sigma=0,\cdots,s) \tag{1.12}$$

当外流时，(A>0)边界条件(1.10$_c$)变为

$$T_\sigma^{(\mu)}=\sum_{j=0}^{m}C_{j\sigma}^{(\mu)}E^j,\ C_{j,-1}^{(\mu)}\neq 0. \ (\mu=0,\cdots,r-1;\sigma=-1,\cdots,q) \tag{1.13}$$

当只当内流$(1.7_{a,b})$，(1.9)及外流$(1.8_{a,b})$，(1.5_c)为稳定时，则(1.5)为稳定.

引理 1.2 当只当$(1.7_{a,b})$，(1.9)及$(1.8_{a,b})$，(1.5_c)的各个标量支量$(1.10_{a,b})$，(1.12)及$(1.10_{a,b})$，(1.13)为稳定时，差分逼近(1.5)为稳定.

在§1.4中可以证明：

引理 1.3 内流逼近$(1.10_{a,b})$，(1.12)是无条件稳定.

这个引理是由 E. Tadmor[8]所得到. 由上述两引理得.

定理 1.1 差分逼近(1.4)当只当外流标量分量的主要部分稳定时为稳定.

这因为内流部分已经是无条件稳定的原故. 由上述讨论，可看到，关于稳定性的研究，可简化为标量方程$(1.10_{a,b})$及(1.12)或(1.13)的稳定性问题. 这里简述关于差分格式的若干所必要满足的假定，而且以后这些假定均认为已成立.

假定 1.1 差分逼近(1.10)为可解的，即存在一个常数$K>0$，使对于每一个$g\in L_2$，存在$w\in L_2$使下列方程式有唯一的一个解：

$$\begin{cases} Q_{-1}w_\mu = g_\mu,\ (\mu = r, r+1,\cdots) \\ T_{-1}^{(\mu)}w_\mu = g_\mu.\ (\mu = 0,1,\cdots r-1) \end{cases} \tag{1.13'}$$

而且满足条件$\|w\|\leqslant K\|g\|$. 其中L_2是网格函数$w=\{w_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$，

而且满足$\|w\|^2=h\sum_{\nu=0}^{\infty}|w_\nu|^2<\infty$的函数空间.

这假定是必要的，即假定(1.13)′的逆存在，可书为形式$w_\nu=Gg_\nu$ $(\nu=0,1,\cdots)$ 其中 G 为某有界算子. 显然，若 (1.13)′关于$w_\nu(\nu=0,1,\cdots)$不能解出，这种格式还有什么用处呢?

假定 1.2 基本格式(1.10_a)关于纯初值问题为稳定的，即对于$-\infty<\nu<\infty$，令

$$A_j(z) = A_{j-1} - \sum_{\sigma=0}^{s} z^{-\sigma-1} A_{j\sigma} (j = -r, \cdots, p) \tag{1.14}$$

即设(1)Von-Neumann 条件满足，即方程式

$$\sum A_j(z) x_j = 0 \quad (x = e^{i\xi}) \tag{1.15}$$

的解 $z(x)$满足条件$|x|=1 \Rightarrow |z| \leqslant 1$.

(2)在(1.15)中$|z|=1$ 的根为单根.

假定 1.3 基本格式(1.10_a)假定为

①耗散的，即

$$|x| = 1, x \neq 1 \Rightarrow |z| < 1. \tag{1.16}$$

或 ②酉格式即

$$|x| = 1 \Rightarrow |z| = 1. \tag{1.17}$$

假定 1.4

$$A_{-r}(z) A_p(z) \neq 0. \quad (|z| \geqslant 1) \tag{1.18}$$

§1.3 主要定理的叙述及例

这一节的目的是给出了方便于检查的关于外流($A>0$)的差分逼近形式(1.10)，(1.13)的稳定性判别方法. 根据定理 1.1，这是判别差分逼近(1.4)的总体稳定的关键.

在§1.5 中证明了同基本格式(1.10_a)无关，只同边界条件有关的结果. 这个结果只限于应用在平移的(1.10_c)，(1.13)的边界条件，即

$$\begin{cases} T_{-1} v_\mu(t+k) = \sum_{\sigma=0}^{q} T_\sigma v_\mu(t - \sigma k), \\ T_\sigma = \sum_{j=0}^{m} C_{j\sigma} E^j, \quad C_{0,-1} \neq 0, \quad (\mu = 0, \cdots, r-1) \end{cases} \tag{1.19}$$

其中 $C_{j\sigma}$是同 μ 无关，而边界值是由同一步骤所决定. 特别只由单个点($r=1$)所决定的边界条件时，那么依定义为平移的. 对于边界条件(1.19)我们求出边界条件的特征函数(即特征方程的解)，即

用 $v(x_j,t_n)=z^n x^j$ 代入后得：

$$R(z,x)=\sum_{j=1}^{m} C_j(z)x^j, \tag{1.20}$$

其中

$$C_j(z)=C_{j-1}-\sum_{\sigma=0}^{q} z^{-\sigma-1}C_{j\sigma}. \tag{1.21}$$

今后用 $R(z,x)=0$ 表示边界格式的特征方程式. 现在叙述下列结果.

定理 1.2 设基本格式(1.10$_a$)是两层格式，而且是耗散的. 则外流差分逼近(1.10$_{a,b}$)及(1.19)，当

$$R(z,x)\neq 0 \quad (\forall\ |z|\geqslant 1, 0<|x|<1) \tag{1.22}$$

成立时为稳定.

(此定理证明见后.)

例 1.1 设基本格式(1.10$_a$)为两层耗散的，又设边界条件是由 $\omega-1$ 阶水平外推所决定，即

$$v_\mu(t+k)=\sum_{j=1}^{\omega}\binom{\omega}{j}(-1)^{j+1}v_{\mu+j}(t+k).$$

$$(\mu=0,1,\cdots,r-1) \tag{1.23$_a$}$$

这个单层的边界格式的特征函数是同 z 无关的，并满足

$$R(z,x)=R(x)=1-\sum_{j=1}^{\omega}\binom{\omega}{j}(-1)^{j+1}x^j=(1-x)^\omega\neq 0.$$

$$(|z|\geqslant 1, 0<|x|<1) \tag{1.23$_b$}$$

因此(1.22)成立，由定理 1.2 可知(1.23)，(1.10$_{a,b}$)为稳定.

现指出，定理 1.2 对多于二层的格式是不成立的. 很奇怪的是，例 1.1 对于外流耗散多层差分格式($s\geqslant 3$)边界条件(1.23$_a$)不是稳定的. 例如三层 5 点基本格式 LFd：

$$v_\mu(t+k)=[I-(\varepsilon/16)(E-I)^2(I-E^{-1})^2]v_\mu(t-k)+\lambda A(E-E^{-1})v_\mu(t).$$

$$(0<\varepsilon<1,\ 0<\lambda A\leqslant 1-\varepsilon,\ \mu=2,3,\cdots) \qquad (1.24)$$

这个格式为耗散的，其特征函数为(即用 $v(x_j,t_n)=z^n x^j$ 代入后得) $z-z^{-1}=\lambda A(x-x^{-1})-(\varepsilon/16)(\sqrt{x}-x^{-1/2})^4 z^{-1}$. 当 $x=e^{i\theta}$代入后得 $z-2i\lambda A\sin\theta-z^{-1}(1-\varepsilon\sin^4(\theta/2))=0$ 或 $z^2-2i\lambda Az\sin\theta-(1-\varepsilon\sin^4(\theta/2))=0$. 解之得 $z=i\lambda A\sin\theta\pm(1-\lambda^2A^2\sin^2\theta-\varepsilon\sin^4(\theta/2))^{1/2}$. 故当 $\lambda^2A^2\sin^2\theta\leqslant 1-\varepsilon$ 时，即 $\lambda A\leqslant\sqrt{1-\varepsilon}$时，$|z|^2=1-\varepsilon\sin^4(\theta/2)<1$. ($\theta\neq 0$，即 $x\neq 1$)即满足关系$|x|=1,x\neq 1\Rightarrow|z|<1$. 故为三层耗散格式. 设其边界条件为(1.23$_a$)所决定，但由定理 1.2 不能断定其为稳定. 在后面的例 1.7 中，可知格式(1.24)及(1.23$_a$)为不稳定.

定理 1.3　设基本格式(2.10$_a$)为耗散，若

$$R(z,x)\neq 0,\quad (\forall\ |z|\geqslant 1,0<|x|<1) \qquad (1.22)$$

$$R(z,1)\neq 0.\quad (\forall\ |z|=1,z\neq 1) \qquad (1.25)$$

则外流差分逼近(1.10$_{a,b}$)，(1.19)为稳定.

(此定理证明见后).

例：差分格式(1.24)、(1.23$_a$)表示 $R(z,1)=(x-1)^m=0$. 即 $R(-1,1)=0$. 故定理 1.3 中条件(1.25)不满足，所以不能保证(1.24)，(1.23$_a$)为稳定. 这也说明了(1.25)是定理 1.3 一定要满足的条件.

定理 1.2，定理 1.3 说明了边界条件(1.19)当不是单层时，条件(1.22)变为一个很不方便判别的两个变量 z 及 x 的不等式. 对边界格式

$$\begin{cases} T_{-1}v_\mu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{q}T_\sigma v_\mu(t-\sigma k),\ (\mu=0,1,\cdots) \\ T_\sigma=\sum_{j=0}^{m}C_{j\sigma}E^j.\ (\sigma=-1,\cdots,r) \end{cases} \qquad (1.26)$$

相似于假定 1.1 及 1.2，并引入下列概念：

定义 1.1 边界条件(1.26)称为可解的：若存在常数 $K>0$，使对于 $g\in L_2$ 对于方程

$$T_{-1}w_\mu = g_\mu, \quad (\mu = 0,1,\cdots) \tag{1.27}$$

存在唯一解 $w\in L_2$ 并满足 $\|w\|\leqslant K\|g\|$.

定义 1.2 边界条件(1.26)称为满足 Von-Neumann 条件，如果其特征方程式

$$R(z,x) = \sum_{j=0}^{m} C_j(z)x^j = 0 \tag{1.28}$$

的解满足 $|x|=1\Rightarrow|z|\leqslant 1$.

定理 1.4 （第一主定理）设下列条件同时成立时，

1）基本格式(1.10$_a$)为耗散；

2）格式满足(1.25)$R(z,1)\neq 0$；($|z|=1,z\neq 1$)

3）边界格式(1.26)为可解并满足 V-N 条件；

则外流差分逼近(1.10$_{a,b}$)，(1.19)为稳定.

（此定理证明见后）.

定理中的充分条件(1.25)及可解边界条件(1.26)的判别，是由下列 2 个引理给出：

引理 1.4 条件(1.25) $R(z,1)\neq 0$($|z|=1,z\neq 1$)当下列条件之一满足时即为满足.

(1)边界条件(1.19)为两层(即 $q=0$)并至少具有零阶精度.

(2)边界条件为三层，至少具有零阶精度，同时 $R(-1,1)\neq 0$.

证 (1)$R(z,1)=0$ 只有一个根 $z=1$，即 $R(1,1)=0$. 因此 $R(z,1)\neq 0$. ($|z|=1,z\neq 1$)

(2)$R(z,1)=0$ 有两个根 z，其中 $R(1,1)=0$. 由于系数为实数，故另一根也为实的. 因此若 $R(-1,1)\neq 0$，则必没有 $|z|=1$，$z\neq 1$的根. 故得 $R(z,1)\neq 0$($|z|=1,z\neq 1$)，证毕.

引理 1.5 (1)边界格式(1.26).如果

$$T_{-1}(x) \equiv \sum_{j=0}^{q} C_{j(-1)} x^j \neq 0, \quad (0 < |x| \leqslant 1)$$

则为可解.(2)特别显式边界格式是时常可解.

证 由于 $T_{-1}(x) \neq 0$,则必有 $|T_{-1}(x)| \geqslant \delta > 0$,故 $T_{-1}^{-1}(x)$ 存在有界,因此 $T_{-1}w = g$ 为可解而且有 $\| w \| \leqslant K \| g \|$.显式差分格式显然满足上述条件,证毕.

例 1.2 设基本格式(1.10ₐ)为耗散的,而边界条件是 $\omega-1$ 阶斜外推:

$$v_\mu(t+k) = \sum_{j=1}^{\omega} \binom{\omega}{j} (-1)^{j+1} v_{\mu+j}(t-(j-1)k),$$

$$(\mu = 0, 1, \cdots, r-1) \qquad (1.29_a)$$

其特征方程为:

$$R(z,x) = 1 - \sum_{j=1}^{\omega} \binom{\omega}{j} (-1)^{j-1} z^{-j} x^j = (1 - z^{-1}x)^{\omega}.$$

$$(1.29_b)$$

很明显地(1.25),$R(z,1) \neq 0$. ($|z|=1, z \neq 1$)因此由引理 $1.5_{(2)}$ 可知显式为可解的.再由定理 1.4 可知差分逼近$(1.10_{a,b})$及(1.29_a)为稳定.

例 1.3 设基本格式(1.10_a)为耗散,设边界条件是框形二阶精度格式:

$$v_\mu(t+k) + v_{\mu+1}(t+k) - \lambda A[v_{\mu+1}(t+k) - v_\mu(t+k)]$$
$$= v_\mu(t) + v_{\mu+1}(t) + \lambda A[v_{\mu+1}(t) - v_\mu(t)],$$
$$(\mu = 0, 1, \cdots, r-1) \qquad (1.30)$$

其特征方程为

$$R(z,x) \equiv z[1 + x - \lambda A(x-1)] - [1 + x + \lambda A(x-1)] = 0.$$

故由引理 $1.4_{(1)}$,(1.25)$R(z,1) \neq 0$. ($|z|=1, z \neq 1$)(2)它是两层

格式，$R_r(T_{-1}(x))=1+R_r(x)+\lambda A.(1-R_r x)\neq 0$，$|x|\leqslant 1$. 故由引理 1.5 知边界格式为可解，而且 $|z(x)|_{x=e^{i\theta}}=|1+e^{i\theta}+\lambda A(e^{i\theta}-1)|/|1+e^{i\theta}-\lambda A(e^{i\theta}-1)|=1$. 这因为 $(1+e^{i\theta}+\lambda A(e^{i\theta}-1))^2=2(1+\lambda^2A^2)+2\cos\xi(1-\lambda^2A^2)=(1+e^{i\theta}-\lambda A(e^{i\theta}-1))^2$ 因此 V-N 条件满足. 故定理 1.4 的条件全部满足，故格式(1.10$_a$)，(1.30)为稳定.

例 1.4 设基本格式(1.10$_a$)为耗散，而边界格式为右向加权的尤拉格式：

$$v_\mu(t+k)=v_\mu(t-k)-\lambda A[2v_{\mu+1}(t)-v_\mu(t+k)-v_\mu(t-k)].\ (0<\lambda A\leqslant 1,\mu=0,1,\cdots,r-1)\quad(1.31)$$

其特征方程式为 $R(z,x)=1-z^{-2}-\lambda A(2xz^{-1}-1-z^{-2})$. 当等于零时，令 $x=e^{i\xi}$，解出 z 为 $z(e^{i\xi})=e^{i\xi}(\lambda A\pm b(\xi))/(\lambda A+1)$，$b(\xi)=((\lambda A)^2+e^{-2i\xi}(1-\lambda^2A^2))^{1/2}$. 因此得 $|b(\xi)|^2\leqslant 1$，$(\lambda A<1)$ 故得 $z(x)|_{x=1}=(\lambda A\pm 1)/(\lambda A+1)\neq e^{i\theta}(0<\theta\leqslant\pi)$. 因此得 $R(z,1)=(1-z^{-2}-\lambda A(2z^{-1}-1-z^{-2}))\neq 0$. $(|z|=1,z\neq 1)$ 而且 $R(-1,1)\neq 0$. 由引理 1.4 知条件(1.25)为成立的. 由于 $0<\lambda A\leqslant 1$，则 $|b(\xi)|\leqslant 1$，$|\xi|\leqslant\pi$. 故 $|z(e^{i\xi})|\leqslant(\lambda A+|b(\xi)|)/(1+\lambda A)\leqslant 1$. 边界格式满足 V-N 条件. 由于边界格式为显式，故由引理 1.5$_{(2)}$ 可知为可解. 故由定理 1.4 可知格式(1.10$_a$)，(1.31)为稳定.

注意，在定理 1.4 中，边界条件为可解的是一定要满足的条件. 设基本格式为耗散的，并具有零阶的边界条件：

$$v_\mu(t+k)-\theta v_{\mu+1}(t+k)=v_\mu(t)-\theta v_{\mu+1}(t).$$
$$(\theta>1,\mu=0,\cdots,r-1)\quad(1.32_a)$$

其边界条件的特征函数为

$$R(z,x)=(1-z^{-1})(1-\theta x).\quad(1.32_b)$$

由此得引理 1.4$_{(1)}$ 及(1.25) $R(z,1)=(1-z^{-1})(1-\theta)\neq 0$. $(|z|=1,z\neq 1)$ 故(1.25)满足，而且 z=1 并满足 V-N 条件，但此式为不可解. 因为在(1.27)中右边 g=0 时由(1.32$_b$)仍得 $\omega=\theta^{-1}$，$\therefore w=$

$\{\theta^{-\mu}\omega_0\}_{\mu=0}^{\infty}$故 $\omega\in L_2$，这同 $\|\omega\|\leqslant K\|g\|=0$ 相矛盾. 因此为不可解.

在后面§1.4的例1.8中，可以证明格式(1.10$_a$)及(1.32$_a$)是不稳定的.

定理1.4中的条件(1.25)是稳定的必需条件，这可以由下列例子中看出. 设基本格式为(1.24) $v_\mu(t+k)=[I-(\varepsilon/16)(E-I)^2(I-E^{-1})^2]v_\mu(t-k)+\lambda A[E-E^{-1}]v_\mu(t)$，$0<\varepsilon<1$，$0<\lambda A<1-\varepsilon=1/2$. 而相容边界条件取为形式：

$$v_\mu(t+k)=v_\mu(t-k)+2\lambda A[v_{\mu+1}(t-k)-v_\mu(t-k)],\quad \mu=0,1 \tag{1.33$_a$}$$

由于基本格式为耗散及引理1.5$_{(2)}$边界格式为可解. 边界特征方程为

$$R(z,x)=1-z^{-2}(1+2\lambda A(x-1)). \tag{1.33$_b$}$$

可证边界条件满足V—N条件，因为 $z^2=1+2\lambda A(x-1)=1-2\lambda A+2\lambda A(\cos\theta+i\sin\theta)$ 故得 $|z^2|^2\leqslant 4\lambda^2A^2+4\lambda A(1-2\lambda A)+(1-4\lambda A)+4\lambda^2A^2=1$ 由下面一节的例1.9中可证明格式(1.24)，(1.33$_a$)为不稳定. 为什么呢？因为此时条件(1.25)不满足，即 $R(-1,1)=0$.

定义1.3 边界格式(1.26)称为耗散的，如果其特征方程(1.28)的根满足 $|x|=1,x\neq1\Rightarrow|z|<1$.

定理1.5 (第二主定理)设下列条件同时成立时

(1)基本格式(2.10$_a$)为耗散或为酉格式，

(2)(1.25)成立，

(3)边界格式(1.26)为可解及耗散.

则外流差分逼近(1.10$_{a,b}$)，(1.19)为稳定的.

(此定理证明见后)

例1.5 设基本格式(1.10$_a$)为耗散或酉格式，设边界条件为右向显式尤拉格式：

$$v_\mu(t+k)=v_\mu(t)+\lambda A(v_{\mu+1}(t)-v_\mu(t)). \qquad (1.34)$$
$$(0<\lambda A<1,\mu=0,1,\cdots,r-1)$$

边界条件的特征方程为 $R(z,x)=1-z^{-1}(1+\lambda A(x-1))$. $(0<\lambda A<1)$. 故得 $|z(e^{i\xi})|^2=(\lambda A)^2+(1-\lambda A)^2+2\lambda A\cdot(1-\lambda A)\cos\xi=1-4\lambda A(1-\lambda A)\sin^2\frac{\xi}{2}<1$, $(\xi\neq 0)$ 故对应边界格式为耗散. 而且(1.34)是两层显式并具有一阶精度格式. 由引理 $1.4_{(1)}$ 故知边界为两层格式,并满足(1.25) $R(z,1)=1-z^{-1}\neq 0$. $(|z|=1, z\neq 1)$ 而且显式格式为可解. 故定理 1.5 的条件满足,因此差分逼近 (1.10_{ab}),(1.34)为稳定.

例 1.6 设基本格式 (1.10_a) 为耗散或酉格式,边界条件为右向一阶精度隐式尤拉格式:

$$v_\mu(t+k)-\lambda A[v_{\mu+1}(t+k)-v_\mu(t+k)]=v_\mu(t)\ (\lambda A>0)$$
$$(\mu=0,1,\cdots,r-1) \qquad (1.35)$$

其特征方程为 $R(z,x)=1-\lambda A(x-1)-z^{-1}=0$. 故得

$$|z(e^{i\xi})|^2=[(\lambda A)^2+(1+\lambda A)^2-2\lambda A(1+\lambda A)\cos\xi]^{-1}$$

即 $|x|=1,x\neq 1\Rightarrow|z|<1$,故边界条件为耗散. 由引理 $1.4_{(1)}$ 可知边界格式为两层的而且

$$R_e(T_{-1}(x))=1+\lambda A(1-R_e x)\neq 0, \quad (|x|\leqslant 1)$$

由引理 $1.5_{(1)}$ 可知此边界格式为可解. 因此根据定理 1.5,保证了它的稳定性.

最后,可知条件(1.25)是定理 1.5 及定理 1.4 的一定要满足的条件. 例如考虑基本格式为非耗散的三层蛙跳格式.

$$v_\mu(t+k)=v_\mu(t-k)+\lambda A[v_{\mu+1}(t)-v_{\mu-1}(t)]. \ (1.36)$$
$$(0<\lambda A<1/2,\mu=1,2,\cdots)$$

边界条件取 (1.33_a) 而且 $\mu=0$. 前面已述,边界格式为可解及耗散,但(1.25)不成立. 因为 $R(z,x)=z-z^{-1}-\lambda A(x-x^{-1})$, $R(z,1)$

$=z-z^{-1}\neq 0$. ($|z|=1, z\neq 1$)此式不成立，因为 $R(-1,1)=0$. 今后在例 1.10 中可证格式(1.36)，(1.33_a)为不稳定.

§1.4 稳定性判别法初步

在此节中，应用 G. K. S. 判别稳定性方法得到定理 1.7，并对于差分逼近(1.10)得到初步的稳定性判别方法. 这个判别法是证明引理 1.3 及定理 1.2—1.5 的主要工具. (1.10)的预解方程式为

$$(Q_{-1}-\sum_{\sigma=0}^{s} z^{-\sigma-1}Q_{\sigma})w_{\mu}=0.\quad(\mu=r,r+1,\cdots)\quad(1.37_a)$$

其边界条件为

$$(T_{-1}^{(\mu)}-\sum_{\sigma=0}^{q} z^{-\sigma-1}T_{\sigma}^{(\mu)})w_{\mu}=0,\quad(\mu=0,1,\cdots,r\text{-}1)$$

$$(1.37_b)$$

其中 $z\neq 0$ 是固定的任意复数. ($1.37_{a,b}$)可书为

$$G(z)w=0,\quad(1.38)$$

其中 $G(z)$ 是由($1.37_{a,b}$)所定义的有界线性算子.

(1.10)的特征值：若(1.38)有一个 $w=w(z)\in L_2$ 的非平凡解，则称 z 为(1.10)的特征值.

(1.10)的广义特征值：若 z 不是(1.10)的特征值. 但存在 $\{w(z)^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}\in L_2$ 使 $\|w(z)^{(j)}\|=1$ 而且

$$\lim_{j\to\infty} G(z)w(z)^{(j)}=0.$$

则称 z 为(1.10)的广义特征值.

现在叙述第二章中定理 2.5 G. K. S. 稳定的判别定理：

定理 1.6 差分逼近(1.10)当只当对于 $|z|\geq 1$ 其特征方程没有特征值及广义特征值 z 时为稳定. (即 G. K. S. 稳定)

引理 1.6 差分逼近(1.10)为可解，当只当下列条件均成立时：

(1)差分方程式 $Q_{-1}w_{\mu}=0$, ($\mu=r,r+1,\cdots$) $T_{-1}^{(\mu)}w_{\mu}=0$,

$(\mu=0,\cdots,r-1)$在 $w\in L_2$ 中没有非平凡解.

(2)方程式

$$Q_{-1}(x)=\sum_{j=-r}^{p}A_{j-1}x^j=0 \qquad (1.39_a)$$

恰有 r_0 个 $0\leqslant|x_j|<1$ 的解 x^j,其中

$$r_0=\max\{-j:A_{j-1}\neq 0\}. \qquad (1.39_b)$$

(3)$Q_{-1}(x)$在单位圆上不为零,即 $Q_{-1}(x)\neq 0,(|x|=1)$.

说明 条件(1),(3)表示 $Q_{-1}w_\nu=0,T_{-1}^{(\mu)}w_\nu=0$ 只有零解,即表示G 有逆,而且$|G^{-1}|\neq 0$.故为可解,而且 $Gw=g$ 满足 $\|w\|\leqslant K\|g\|$.条件(2)表示有 r_0 个内根.详细证明从略.(参看[8]引理4.1)

现在回到(1.14)中的 $A_j(z)$,并引入(1.10_a)的特征方程式

$$P(z,x)=\sum_{j=-r}^{p}A_j(z)x^j=0, \qquad (1.40)$$

其中$r+p$ 个根 $x^j(z)$在逼近(1.10)中起了重要的作用,此后常用 $P(z,x)=0$ 表示基本差分格式的特征方程式.

引理 1.7 对于$|z|>1$,特征方程式(1.40)恰有 r 个根,$0<|x_j(z)|<1$,p 个根$|x_j(z)|>1$,没有$|x_j(z)|=1$ 的根.

证 由假定 1.4 可知$P(z,x)$的最高阶系数 $A_{-r},A_p\neq 0$.它有$r+p$ 个根,均满足$|x_j|>0$.这些根均为下列方程式的解:

$$p_r(z,x)=x^r p(z,x)\equiv 0. \qquad (1.41)$$

由假定 $1.2_{(1)}$,即$|x|=1\Rightarrow|z|\leqslant 1$.因此当$|z|>1$ 时,$p_r(z,e^{i\xi})\neq 0$.$(|z|>1,|\xi|\leqslant\pi)$由于 $p(z,x)$的根是 z 的连续函数,由此可知对于$|z|>1$ 满足 $0<|x_j(z)|<1$ 的根个数同 z 无关,特别考虑

$$\lim_{z\to\infty}P_r(z,x)=\sum_{j=-r}^{p}A_{j-1}x^{j+r}.$$

由引理 $1.6_{(3)}$可知 $\lim\limits_{z\to\infty}P_r(z,e^{i\xi})=Q_{-1}(x)\neq 0.(|x|=1)$由连续性

$P_r(z,x)$当$0<|x_j(z)|<1$的根的个数可由$\lim\limits_{z\to\infty}P_r(z,x)$当$|x_j|<1$时的根的个数决定. 得

$$\lim_{z\to\infty}P_r(z,x)=x^{r-r_0}\sum_{j=-r_0}^{p}A_{j(-1)}x^{j+r_0},$$

其中r_0为(1.39$_b$)$r_0=\max\{-j: A_{j-1}\neq 0\}$. 因此由引理1.6$_{(2)}$可知$\sum\limits_{j=-r_0}^{p}A_{j-1}x^{j+r_0}$恰有$r_0$个$|x|<1$的根,因此当$z\to\infty$时$P(z,x)$恰有$r$个$|x|<1$的根. 引理证毕.

依据上述引理,特征方程(1.40)的根对于$|z|>1$可分开为两组:r个内根满足$0<|x_j|<1$及p个外根$|x_j(z)|>1$. 由连续性,内根及外根个数在$|z|\geqslant 1$均保持$|x|\leqslant 1$及$|x|\geqslant 1$性质. 而且对于$|z|\geqslant 1$由假定$A_{-r}(z)A_p(z)\neq 0$,故得$x=0$不是$P(z,x)=0$的根. 故得:

引理1.8 对于$|z|\geqslant 1$,特征方程式(1.40)的根可分开为r个内根$0<|x_j(z)|\leqslant 1$及p个外根$|x_j(z)|\geqslant 1$.

现设z为已给,又已知z为(1.10)的特征值或一个广义特征值,当只当(1.37)有一个非平凡的解,并具有下列形式:

$$w_\mu=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=0}^{M_\alpha-1}\tau_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}(\mu)(x_\alpha(z))^\mu,\ (\mu=0,1,\cdots)\qquad(1.42)$$

其中$x_\alpha(z), 1\leqslant\alpha\leqslant N$是(1.40)的相异内根,其重数为$M_\alpha=M_\alpha(z)$. 其中$\Phi_{\alpha\beta}(\nu)$是关于$\nu$的任意多项式,设其最高次数为$\beta$,即$\mathrm{Deg}[\Phi_{\alpha\beta}(\nu)]=\beta$,$\tau_{\alpha\beta}$是它的待定系数. 依据引理1.8 $\sum\limits_{\alpha=1}^{N}M_\alpha=r$. 为了求$\tau_{\alpha\beta}$,把(1.42)代入(1.37$_b$)并得到$r$个未知数$\tau_{\alpha\beta}$的$r$个线性齐次方程组

$$J(z)\tau=0,\qquad(1.43)$$

其中$J(z)$是$r\times r$系数矩阵,而$\tau=[\tau_{\alpha\beta}]$是未知向量. 明显地在

(1.42)中当只当(1.43)有非零解 τ 时才具有非零的 $w=w(z)$. 因此只有当 $\mathrm{Det}J(z)\neq 0$ 时 z 才不是特征值，或不是广义特征值.(因此时 $\tau_{\alpha\beta}\equiv 0$). 故由第一章§4定理1或第二章§2定理2.5得

引理 1.9 差分逼近(1.10)当只当

$$\mathrm{Det}J(z)\neq 0 \quad (|z|\geqslant 1)$$

时，才为稳定.

现在对于 $|z|\geqslant 1$ 所对应的内根 $x_\alpha=x_\alpha(z)$，$1\leqslant\alpha\leqslant N$，其重数为 M_α，现对(1.42)中的多项式 $\Phi_{\alpha\beta}(\nu)$ 作特殊选择：

$$\Phi_{\alpha\beta}(\mu)=(x_\alpha(z))^{-\beta}\beta!\binom{\mu}{\beta}=(x_\alpha(z))^{-\beta}(\mu-\beta+1)\cdots\mu.$$

因此(1.42)变为

$$w_\mu=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=0}^{M_\alpha-1}\tau_{\alpha\beta}\beta!\binom{\mu}{\beta}(x_\alpha)^{\mu-\beta}. \quad (\mu=0,1,\cdots)$$

代入(1.37$_b$)中，其中 $T_\nu^{(\mu)}$ 为(1.12)或(1.13)所决定，得 $J(z)\tau'=0$ 的显表达式为(当 $A<0$)

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=0}^{M_\alpha-1}\beta!\binom{\mu}{\beta}(x_\alpha)^{\mu-\beta}\tau_{\alpha\beta}=0. \quad (\mu=0,1,\cdots,r-1) \quad (1.44)$$

或为(当 $A>0$)

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=0}^{M_\alpha-1}\sum_{j=0}^{m}(C_{j-1}^{(\mu)}-\sum_{\sigma=0}^{q}z^{-\sigma-1}C_{j\sigma}^{(\mu)})\beta!\binom{\mu+j}{\beta}(x_\alpha(z))^{\mu+j-\beta}\tau_{\alpha\beta}=0.$$

$$(\mu=0,1,\cdots,r-1) \quad (1.45)$$

为了更进一步简化这些表达式，我们引入 r 个边界函数

$$R_\mu(z,x)=\begin{cases} x^\mu, & (A<0) \\ \sum_{j=0}^{m}(C_{j-1}^{(\mu)}-\sum_{\sigma=0}^{q}z^{-\sigma-1}C_{j\sigma}^{(\mu)})x^{\mu+j} & (A>0). \end{cases}$$

$$(\mu=0,\cdots,r-1) \quad (1.46)$$

因为

$$
\frac{\partial^{\beta} R_{\mu}(z,x)}{\partial x^{\beta}} =
\begin{cases}
\beta! \binom{\mu}{\beta} x^{\mu-\beta}, & (A<0) \\
\sum\limits_{j=0}^{m} \left(C_{j-1}^{(\mu)} - \sum\limits_{\sigma=0}^{q} z^{-\sigma-1} C_{j\sigma}^{(\mu)} \right) \beta! \binom{\mu+j}{\beta} x^{\mu+j-\beta}. & (A>0)
\end{cases}
$$

因此方程组(1.44)及(1.45)可取下列的统一紧凑的形式：

$$
\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=0}^{M_{\alpha}-1} \left[\frac{\partial^{\beta} R_{\mu}(z,x)}{\partial x^{\beta}} \right]_{x=x_{\alpha}(z)} \cdot \tau_{\alpha\beta} = 0. \quad (\mu = 0,\cdots,r-1)
$$

因此 $J(z)$ 的系数矩阵可以方便地取为形式：

$$
J(z) = [H(z,x,M_1),\cdots,H(z,x_N,M_N)], \tag{1.47$_a$}
$$

其中 $H(z,x_{\alpha},M_{\alpha}),1\leqslant\alpha\leqslant N$ 是 $r\times M_{\alpha}$ 方块矩阵

$$
H(z,x_{\alpha},M_{\alpha}) =
\left[
\begin{bmatrix} R_0(z,x) \\ R_1(z,x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{r-1}(z,x) \end{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x}
\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{r-1} \end{bmatrix}
\cdots
\frac{\partial^{M_{\alpha}-1}}{\partial x^{M_{\alpha}-1}}
\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{r-1} \end{bmatrix}
\right]_{x=x_{\alpha}(z)}
\tag{1.47$_b$}
$$

故由引理 1.9 得

引理 1.10 差分逼近(1.10)当只当

$$
\mathrm{Det}J(z) = \mathrm{Det}[H(z,x_1,M_1),\cdots,H(z,x_N,M_N)] \neq 0 \quad (|z| \geqslant 1) \tag{1.48}
$$

时为稳定，其中 $x_{\alpha}=x_{\alpha}(z),(1\leqslant\alpha\leqslant N)$，是(1.40)的相异内根，其重数各为 $M_{\alpha}=M_{\alpha}(z)$.

现讨论内流 $(A<0)$ 边界条件，其齐次式是由(1.10$_c$)及(1.12)给出. 其中外流 $(A>0)$ 边界条件为(1.10$_c$)，(1.13)是平移的. 在此情形下，外流及内流平移的边界函数(1.46)变为形式：

$$R_\mu(z,x)=\begin{cases} x^\mu, & (A<0) \\ \sum_{j=0}^{m}(C_{j-1}-\sum_{\sigma=0}^{q} z^{-\sigma-1}C_{j\sigma})x^{\mu+j}. & (A>0) \end{cases}$$

$$(\mu=0,1,\cdots,r-1) \tag{1.49}$$

现令 $R=R(z,x)=R_0(z,x)$，得

$$R_\mu(z,x)=x^\mu R(z,x). \quad (\mu=0,1,\cdots,r-1)$$

因此在(1.47$_b$)中的 $J(z)$ 矩阵变为

$$H(z,x_\alpha,M\alpha)$$

$$=\left[\begin{bmatrix} R \\ xR \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{r-1}R \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} R \\ xR \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{r-1}R \end{bmatrix}, \cdots, \frac{\partial^{M_\alpha-1}}{\partial x^{M_\alpha-1}}\begin{bmatrix} R \\ xR \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{r-1}R \end{bmatrix}\right]_{x=x_\alpha} \tag{1.50}$$

现在可以简化引理(1.10)如下：

定理 1.7 差分逼近(1.10)其边界条件是平移的，是由(1.19)，$(A>0)$或由(1.12)，$(A<0)$给出. 当只当对于$\forall z$：$|z|\geqslant1$，对应内根 $x_\alpha(z)$，$1\leqslant\alpha\leqslant N$ 满足

$$R(z,x_\alpha)\neq0 \quad (\alpha=1,\cdots,N;|z|\geqslant1,0<|x_\alpha|\leqslant1) \tag{1.51}$$

时为稳定.

证 对于某些$|z|\geqslant1$ 及内根 x_α 若 $R(z,x_\alpha)=0$，则(1.50)中的 $H(z,x_\alpha,M_\alpha)$第一直行为零，故 $\mathrm{Det}J(z)=0$，由引理 1.10 可知为不稳定.

其逆，若(1.51)成立，对于$|z|\geqslant1$ 及不同的内根 $x_\alpha(z)$，$(1\leqslant\alpha\leqslant N)$. 要证明稳定性，由引理 1.10 只要证明

$$J(z)=[H(z,x_1,M_1),\cdots,H(z,x_\alpha,M_\alpha)] \tag{1.52}$$

的列为线性独立. 为此目的计，由(1.50)设

$$
\sum_{\mu=0}^{r-1}\gamma_{\mu}\begin{bmatrix} x_1^{\mu}R(z,x_1) \\ \vdots \\ \frac{\partial M_s-1}{\partial x_N^{M_s-1}}[x_N^{\mu}R(z,x_N)] \end{bmatrix} = 0. \qquad (1.53)
$$

即(1.52)的列线性组合为零.把(1.53)重新书为形式:

$$
\frac{\partial}{\partial x^j}[R(z,x)(\sum_{\mu=0}^{r-1}\gamma_{\mu}x^{\mu})]|_{x=x_\alpha} = 0.
$$

$$
(0 \leqslant \alpha \leqslant N, 0 \leqslant j \leqslant M_\alpha - 1) \qquad (1.54)
$$

由假定 $R(z,x)|_{x=x_\alpha}\neq 0(1\leqslant\alpha\leqslant N)$ 并应用两个函数乘积高阶导数的 Leibnitz 规律,对于 $j\geqslant 0$ 把(1.54)展开之,应用归纳法可得:$\frac{d^j}{dx^j}[\sum_{\mu=0}^{r-1}\gamma_{\mu}x^{\mu}]_{x=x_\alpha}=0.$ $(1\leqslant\alpha\leqslant N,0\leqslant j\leqslant M_\alpha-1)$因此关于 x 的对于至多 $r-1$ 次多项式 $\Psi(x)=\sum_{\mu=0}^{r-1}\gamma_{\mu}x^{\mu}$ 竟有 r 个根.故 $\Psi(x)\equiv 0$,即系数 γ_μ 必为零.由(1.53)可知(1.52)的列线性独立,稳定性证毕.

引理 1.3 的证明 由(1.49)$R_\mu(z,x)=x^\mu$,可知(1.10.),(1.12)的齐次边界条件为

$$
R(z,x) \equiv R_0(z,x) = 1.
$$

因此(1.51),$R(z,x)\equiv 1\neq 0$.由定理 1.7 即可知(1.10),(1.12)为稳定,证毕.

例 1.7 现考虑耗散格式(1.24),其边界条件为(1.23.)已知(1.24)的特征方程为

$$
P(z,x) = z - z^{-1} - \lambda A(x - x^{-1})
$$

$$
+ (\varepsilon/16z)(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})^4 = 0.
$$

不难由计算证明$(z,x)=(-1,1)$是它的一个内根.再由(1.23.)得 $R(-1,1)=0$.故由定理 1.7 可知 $R(z,x_s)=0$.而为不稳定.

例 1.8　设基本格式为耗散或酉格式，又设边界条件为 (1.32$_a$) $v_\mu(t+k)-\theta v_{\mu+1}(t+k)=v_\mu(t)-\theta v_{\mu+1}(t)$. 由(1.32$_b$) $R(z,x)=(1-z^{-1})(1-\theta x)$，故得 $R(1,x)=0$，对于一切 x 成立. 因此 $R(z,x_\circ)\equiv 0$，$(z=1)$ 由定理 1.7 可知其为不稳定.

例 1.9　设基本格式为耗散的(1.24)，但边界条件为(1.33$_a$)，其特征函数为(1.33$_b$)　$R(z,x)=1-z^{-2}(1+2\lambda A(x-1))$ 得 $R(-1,1)=0$. 故(1.51)　$R(z,x_\circ)\neq 0$. $(|z|\geqslant 1,|x_\circ|\leqslant 1)$ 不成立. 因此由定理 1.7，(1.24)，(1.33)为不稳定.

例 1.10　现考虑蛙跳基本格式(1.36)及边界条件为(1.33$_a$). 但(1.36)具有特征方程式 $P(z,x)=z-z^{-1}-\lambda A(x-x^{-1})$. 则 $(z,x)=(-1,1)$ 为内根. 因为 $\partial x/\partial z=-(\partial P/\partial z)/(\partial P/\partial x)=(1+z^2)/(1+x^2)\lambda A=1/\lambda A>0$. $(\partial p/\partial z=1+z^2,\partial p/\partial x=-(1+x^2)\lambda A)$ 再由泰罗展开式 $x=1+(1/\lambda A)(z+1)\cdots$ 故 $(z,x)=(-1,1)$ 为内根. 故得 $R(-1,1)=0$. 由定理 1.7 可知为不稳定，证毕.

§1.5　主定理的证明

现在证明 §1.3 中的主定理，并由下列引理开始.

引理 1.11　对于 $z=1$，特征方程式(1.40)　$p(z,x)=\sum_{j=-r}^{p}A_jx^j=0$，$(A_j=A_{j-1}-\sum_{\sigma}A_{j\sigma}z^{-\sigma-1})$ 恰有一个根满足 $x(z)|_{z=1}=1$，在 $A>0$ 时这是外根.

证　因为基本格式(1.10$_a$) $Q_{-1}v_\mu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma v_\mu(t-\sigma k)$，$(\mu=r,r+1,\cdots)$，$Q_\sigma=\sum_{j=-r}^{p}A_{j\sigma}E^j$ 是同 $\partial u/\partial t=A\partial u/\partial x\,(A\neq 0)$ 相容，故得相容条件 $\sum_{j=-r}^{p}(A_{j-1}-\sum_{\sigma=0}^{s}A_{j\sigma})=0$，$\sum_{j=-r}^{p}j(A_{j-1}-\sum_{\sigma=0}^{s}A_{j\sigma})=\lambda A\sum_{j=-r}^{p}(\sum_{\sigma=0}^{s}(\sigma+1)A_{j\sigma})$. 这因为把(1.10$_a$)两边用泰罗级数展开，再

把 $\partial u/\partial t = A\partial u/\partial x$ 代入 $\sum_j A_{j-1} v(x+jh, t+k) = \sum_\sigma \sum_j A_{j\sigma} v(x+jh, t-\sigma k)$ 得 $\sum A_{j-1}[v(x,t) + jh\partial u/\partial x + k\partial v/\partial t + \cdots]$

$= \sum_\sigma \sum_j A_{j\sigma}(v(x,t) + jh\partial v/\partial x - \sigma k\partial v/\partial t + \cdots)$. 故得

$$①\sum_j (A_{j-1} - \sum_\sigma A_{j\sigma}) = 0,$$

$$②\sum j(A_{j-1} - \sum_\sigma A_{j\sigma}) = \sum_j \sum_\sigma (\sigma+1)\lambda A A_{j\sigma}.$$

上式又可书为形式:

$$\sum_{j=-r}^{p} A_j(z)|_{z=1} = 0, A_j = (A_{j-1} - \sum_\sigma A_{j\sigma}), \qquad (1.55_a)$$

$$\sum_{j=-r}^{p} jA_j(z)|_{z=1} = -\lambda A \sum_{j=-r}^{p} dA_j(z)/dz|_{z=1}. \qquad (1.55_b)$$

或等价地书为形式:

$$P(z,x)|_{z=x=1} = 0, \quad P(z,x) = \sum_j A_j(z)x^j, \qquad (1.56_a)$$

$$\partial P(z,x)/\partial x|_{z=x=1} = -\lambda A \partial P(z,x)/\partial z|_{z=x=1}. \qquad (1.56_b)$$

由(1.55), 得 $z=1$ 是 $\sum_j A_j(z)=0$ 的解, 由假定 1.$2_{(2)}$ $|z|=1$ 只是特征方程式 $\sum A_j e^{ij\theta}=0$ 的单根. 由此得 $d(\sum_j A_j(z))/dz|_{z=1} \neq 0$. 由(1.$56_b$)及上式, 由隐函数存在定理, 可知在 $z=1$ 邻域, 特征方程式(1.40)$p(z,x) = \sum A_j(z)x^j$ 可关于 x 唯一解出作为 z 的函数, 并使

$$x(z)_{z=1} = 1. \qquad (1.57_a)$$

故定理的第一部分证毕. 为了完成证明, 再考虑外流 $A>0$ 的情形, 由(1.56_b)

$$dx/dz|_{z=1} = -(\partial P/\partial z)/(\partial P/\partial x)|_{x=z=1}$$
$$= 1/\lambda A > 0. \qquad (1.57_b)$$

由(1.57$_a$),(1.57$_b$)对于 $z=1+\varepsilon(\varepsilon>0)$得

$$x(z)=1+\varepsilon/\lambda A+O(\varepsilon^2)>1.$$

故在 $z=1$ 的实的右方领域中,有 $|x(z)|>1$. 由引理 1.7 可知对于 $\forall z: |z|>1, |x(z)|>1$ 均成立,由(1.57$_a$)所决定的(1.40)的根是外根,证毕.

定理 1.2 的证明　对于 $\forall z: |z|\geqslant 1$. 设 x_a 为所有的内根. 由定理 1.7 只证

$$R(z,x_a)\neq 0 \tag{1.58}$$

即可. 由引理 1.8 可知 $0<|x_a(z)|\leqslant 1$.

①对于 $0<|x_a(z)|<1$ 则(1.58)由假定(1.22)可得.

②因此我们只限于讨论在单位圆上的内根即可. 即设 $x_a(z)=e^{i\xi}$, $|\xi|\leqslant\pi$. 但由于基本格式为耗散,则由

$$|x|=1, x\neq 1, \Rightarrow |z|<1. \tag{1.59}$$

故对于 $|z|\geqslant 1$(1.40)$p(z,x)=\sum A_j x^j=0$ 没有 $x=e^{i\xi}$的根.

③因此限于讨论 $|z|\geqslant 1, x_a=1$ 的内根. 由连续性,由(1.59)可得 $|z|\leqslant 1$,故 $x_a=1$ 当 $|z|>1$ 不可能为内根.

④现只讨论

$$|z|=1,\quad (z\neq 1, x_a=1) \tag{1.60}$$

的情形. 因为基本格式为相容,故由(1.56$_a$)可知

$$P(1,1)=0. \tag{1.61}$$

但基本格式为两层,除了$(z,x)=(1.1)$外,(1.56$_a$)没有其它的根,即

$$P(z,1)\neq 0.\quad (|z|=1, z\neq 1)$$

结合①,②,③,④证明了(1.58)对所有的内根成立,由引理 1.7 故为稳定.

定理 1.3 的证明　证明①,②,③同上. ④由于格式不是两层,故 $p(z,x)=0$,除了(1.1)外尚有其它的根. 但由于(1.25)成

立，$|z|=1,(z\neq 1)$所有根满足$R(z,1)\neq 0$，即(1.58)对于所有内根成立，由引理1.7故为稳定，证毕.

现在引入下列引理：

引理1.12 设边界格式(1.26)为可解，并满足V-N条件，则

$$R(z,x)\neq 0,\quad (|x|\leqslant 1,|z|>1) \tag{1.62}$$

$$R(z,x)\neq 0.\quad (|x|<1,|z|\geqslant 1) \tag{1.63}$$

证 应用引理1.6于可解边界格式，可知方程(1.39$_a$)为$T_{-1}(x)=\sum_{j=0}^{m}C_{j,-1}x^j=0$. 这个边界格式为单边的. 由(1.19)可知$C_{0,-1}\neq 0$. 因边界格式$r=0,p=m$故没有内根，只有外根. 而且由引理1.6$_{(2),(3)}$可知$T_{-1}(x)\neq 0,(0<|x|\leqslant 1)$同时得$T_{-1}(0)=C_{0(-1)}\neq 0$，即

$$T_{-1}(x)\neq 0,\quad (|x|\leqslant 1) \tag{1.64}$$

因为边界格式满足V-N条件，故得(1.28)$R(z,e^{i\theta})=\sum_{j=0}^{m}C_je^{ij\theta}$对于$|z|>1$不为零.（因为$|x|=1\Rightarrow|z|\leqslant 1$）因此当$|z|>1$时内根个数同$z$无关. 但当$z\to\infty$时，$\lim_{z\to\infty}R(z,x)=T_{-1}(x)\neq 0,(|x|\leqslant 1)$即$R(z,x)$对于$|z|>1$没有$|x|\leqslant 1$的根.(1.62)证毕.

为了证明(1.63)，我们注意，由(1.62)若$|z|>1$则根$|x|>1$. 故由极限可知$|z|\geqslant 1$时的根有$|x|\geqslant 1$. 因此当$|x|<1$时无根. 即$R(z,x)\neq 0,(|z|\geqslant 1,|x|<1)$，(1.63)证毕.

定理1.4的证明 由边界格式为可解，满足V—N条件，由引理1.12得(1.63)成立，即(1.22)成立，故由定理1.3知(1.10$_{ab}$)，(1.19)为稳定的，证毕.

定理 1.5 的证明

①若基本格式为耗散，边界格式也为耗散，故满足 V-N 条件，由定理 1.4 为稳定.

②若基本格式为酉格式即 $|x|=1 \Rightarrow |z|=1$. 边界格式也满足 V—N 条件及可解. 故由引理 1.12 得

$$R(z,x) \neq 0, \quad (|x| \leqslant 1, |z| > 1) \tag{1.62}$$

$$R(z,x) \neq 0. \quad (|x| < 1, |z| \geqslant 1) \tag{1.63}$$

故只证对于 $|x|=1, |z|=1$ 时，$R(z,x)\neq 0$ 即可. 因为 $|x|=1\Rightarrow |z|=1$，(酉格式)但边界格式为耗散，$|x|=1, x\neq 1 \Rightarrow |z|<1$. 故 $|x|=1, x\neq 1$，$|z|=1$ 必不是边界格式的根，由引理 1.11，$x=1$，$z=1$ 为外根，即 $R(z,x)\neq 0$. ($|x|=|z|=1$) 对于 $x=1, z\neq 1$，可应用(1.25)，故得对所有内根 x_s，$R(z,x_s)\neq 0$，($|z|\geqslant 1, 0<|x_s|\leqslant 1$) (1.51)成立. 故由定理 1.7 可知在酉格式情形下，也为稳定的，证毕.

§2 双曲型方程初边值问题差分逼近判别稳定性的简便方法

引言 在此节中叙述了关于双曲型方程组

$$u_t = Au_x + Bu + f, \quad (x \geqslant 0, t \geqslant 0)$$

初边值问题某一类差分逼近的简便的稳定性判别方法. 应用此判别方法可以对于一些著名的基本格式，边界格式及其种种组合进行稳定性判别. 并对最近在文献中所出现的多种特殊的差分格式也加以稳定性判别.

这里的差分格式包含有更一般的显式、隐式、耗散的双层及多层的格式，并配合以各种类型的边界条件.

现限于讨论外流（A>0）平移形式的边界条件，即对于所有边界点均具有同一的系数.

在这一节中，均假定基本格式对于纯初值问题为稳定. 而且此节中的稳定性也包含第二章中的 G. K. S. 稳定.

由 § 1.1 及 § 1.2 中（参看引理 1.3 及定理 1.1）可知下列定理成立.

定理　差分逼近 $Q_{-1}v_{\mu}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}Q_{\sigma}v_{\mu}(t-\sigma k)+kb_{\mu}(t)$ 当只当外流标量分量（A>0）的主要部分稳定时稳定.

定理　差分格式的流入分量（内流分量 A<0）时常为稳定的.

差分格式的整体稳定性可简化为齐次外流标量部分的稳定性，这是本节的主要论点.

在 § 2.2 中叙述了简化问题的稳定性判别法. 在 § 2.3 中证明了这个判别方法依赖于边界条件. 又称为同内点格式无关的判别方法，这种判别方法比按 G. K. S. 稳定性定义来判别为简便.

在 § 2.2 的第二部分，应用新的判别方法来判别前节 § 1 中各例的稳定性，并指出基本格式为耗散或酉格式，而边界格式为显式或隐式右向尤拉格式，则总体格式为稳定. 对于耗散基本格式，若边界条件为斜外推，或框形格式或右向尤拉格式，则总体格式也为稳定.

在 § 2.2 中，包含了若干新的例子，其中可以看到，若基本格式为任意二层的，则边界为水平外推格式也保证了总体的稳定性.

若基本格式是 Crank-Nicolson 格式，或向后（隐式）尤拉格式，而边界条件是斜外推，则总体也为稳定. 但基本格式及边界格式均非耗散，则由 § 1 的方法尚不能判定其稳定性是否成立.

现不难把此种问题推广到双边界情形，即对于左或右四分之

一平面上的单边值问题分别为稳定，(参看[5]中的定理 5.4)则双边值问题也为稳定.

§2.1 简化问题的差分逼近

考虑一阶双曲型偏微分方程式(1.1ₐ)，这时 A 取形式(1.2).初边值问题由(1.1_b)及(1.1_c)给出. 设 $v_\mu(t)=v(\mu\triangle x,t)$为网格函数，并用差分逼近式(1.4ₐ). 如同前节所述，应用简化内流($A<0$)格式(1.7ₐ)，(1.7_b)，(1.7_c)及外流($A>0$)格式(1.8ₐ)，(1.8_b)，(1.8_c). 对于这些格式已简化为标量的齐次方程式的初边值问题：

$$\begin{cases} Q_{-1}v_\mu(t+\triangle t)=\sum\limits_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma v_\mu(t-\sigma\triangle t), & (\mu=r,r+1,\cdots) \\ Q_\sigma=\sum\limits_{j=-r}^{p}A_{j\sigma}E^j, & (\sigma=-1,\cdots,s) \end{cases} \tag{2.1$_a$}$$

$$v_\mu(\sigma\triangle t)=\overset{0}{v}_\mu(\sigma\triangle t). \quad (\sigma=0,\cdots,s,\mu=0,1,\cdots) \tag{2.1$_b$}$$

边界条件为

$$\begin{cases} T_{-1}v_\mu(t+\triangle t)=\sum\limits_{\sigma=0}^{q}T_\sigma v_\mu(t-\sigma\triangle t), & (\mu=0,1,\cdots,r-1) \\ T_\sigma=\sum\limits_{j=0}^{m}C_{j\sigma}E^j, & (C_{0-1}\neq 0,\sigma=-1,\cdots,q) \end{cases} \tag{2.1$_c$}$$

对于这些方程，前节的假定 1.1—1.4 均成立，此外尚有

假定 1.5

$$\sum_{j=0}^{m}|C_j(z)|\neq 0. \ (C_j=C_{j-1}-\sum_\sigma z^{-\sigma-1}C_{j\sigma},|z|\geqslant 1) \tag{2.2}$$

设方程式(2.1ₐ)的特征方程式为

$$P(z,x)=\sum_{j=-r}^{p}A_j(z)x^j, A_j(z)=A_{j-1}-\sum_{\sigma=0}^{s}z^{-\sigma-1}A_{j\sigma}. \quad (j=-r,\cdots,p) \tag{2.3}$$

§2.2 结果的叙述及例

为了叙述主要稳定性判别方法，相似于(2.3)，定义下列边界特征函数：

$$R(z,x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j(z)x^j,$$

其中 C_j 是由(2.2)所给定，现定义函数

$$\Omega(z,x) = |P(z,x)| + |R(z,x)|. \tag{2.4}$$

并证明：

定理 2.1 （第一主定理） 对于差分逼近(2.1)，若下式成立：

$$\Omega(z,x) \neq 0.\ (|z| \geqslant 1, 0 < |x| \leqslant 1, (z,x) \neq (1,1)) \tag{2.5}$$

则为稳定.

其次把(2.5)分割为三个部分得下列定理：

定理 2.1′ （第一主定理的重述） 对于差分逼近(2.1)，若下列条件同时成立时

$$\Omega(z,x) \neq 0, (|z| \geqslant 1, |x| = 1, x \neq 1) \tag{2.6$_a$}$$

$$\Omega(z,1) \neq 0, (|z| \geqslant 1, z \neq 1) \tag{2.6$_b$}$$

$$\Omega(z,x) \neq 0.\ (|z| \geqslant 1, 0 < |x| < 1) \tag{2.6$_c$}$$

则为稳定.

这个定理的优点是提供了方便有用的充分条件，在(2.6)中包含了这些的条件. 现叙述下列定义：

定义 2.1 边界条件称为耗散：若边界特征方程

$$R(z,x) = 0 \tag{2.7}$$

的根满足 $|x| = 1, x \neq 1 \Rightarrow |z| < 1$.

定义 2.2 称边界条件(2.1$_c$)满足 V－N 条件，若(2.7)的根满足 $|x| = 1 \Rightarrow |z| \leqslant 1$.

定义 2.3　边界条件(2.1.)称为有界可解，若存在一个常数 $K>0$. 使对于每一个 $g\in L_2, w\in L_2$，使下列方程有唯一的解：

$$T_{-1}w_\mu = g_\mu, \quad (\mu = 0,1,\cdots) \tag{2.8}$$

而且满足 $\|w\| \leqslant K\|g\|$.

明显地，这定义即前节的假定 1.1，而且耗散表示满足 V-N 条件.

定理 2.2　(第二主定理，判别稳定的简便形式)

(1)若基本格式或边界格式为耗散，则(2.6$_a$)：$\Omega(z,x)\neq 0(|z|\geqslant 1, |x|=1, x\neq 1)$成立.

(2)不等式(2.6$_b$)$\Omega(z,1)\neq 0$,($|z|\geqslant 1, z\neq 1$)当下列条件之一满足时成立.

(a)基本格式为二层，

(b)基本格式为三层，

$$\Omega(-1,1)\neq 0. \tag{2.9}$$

(c)边界格式为二层，至少有零阶精度.

(d)边界格式为三层，至少有零阶精度，而且(2.9)成立.

(3)若边界格式满足 V-N 条件，有界可解. 则下式成立：

$$(2.6_c): \Omega(z,x)\neq 0. \ (|z|\geqslant 1, 0<|x|<1)$$

上述定理 2.1 及定理 2.2 的证明在 §2.3 中给出. 以下给出若干例子. 并先给出关于边界条件有界可解的若干有用的充分条件. (见本章 §1 引理 1.5)

引理 2.1　(1)边界条件(2.1.)是有界可解的，当只当下列成立：

$$T_{-1}(k) = \sum_{j=0}^{q} C_{j-1}x^j \neq 0. \quad (0<|x|\leqslant 1) \tag{2.10}$$

(2)特别，显式格式时常是有界可解.

例 2.1　设基本格式(2.1.)是任意的，(耗散或非耗散)设边

界条件(2.1$_c$)是由右向一阶精度显式尤拉格式所构成：

$$v_\mu(t+k) = v_\mu(t) + \lambda A[v_{\mu+1}(t) - v_\mu(t)],$$
$$(0 < \lambda A < 1, \mu = 0, \cdots, r-1)$$

这二层边界格式为耗散的.(见例1.5,公式(1.34)).

由于边界条件为显式,则由引理2.1可知为可解的,而且是耗散格式,故V-N条件为满足.因此由定理2.2$_{(3)}$得(2.6$_c$)为满足.再由定理2.2$_{(1)}$可知(2.6$_a$)满足.由定理2.2$_{(2)}$可知(2.6$_b$)为满足.故由定理2.1'可知边界格式为右向一阶显式尤拉格式必为稳定.

注意下列各例中假定1.5均为满足.

例2.2 设基本格式为任意的,而边界格式是右向一阶隐式尤拉格式:

$$v_\mu(t+k) - \lambda A(v_{\mu+1}(t+k) - v_\mu(t+k)) = v_\mu(t),$$
$$(\lambda A > 0, \mu = 0, \cdots, r-1)$$

这个格式为二层耗散.(证见例1.6公式(1.35))故满足V-N条件.而且$T_{-1}=1+\lambda A(1-x)$,$R_eT_{-1}=1+\lambda A(1-\cos\xi)\neq 0$. $|x|<1$.故由引理2.1$_{(1)}$边界条件为有界可解.由定理2.2$_{(3)}$得(2.6$_c$) $\Omega(z,x)\neq 0$,($|z|\geqslant 1, 0<|x|<1$)再由定理2.2及定理2.1'可知为稳定.

例2.3 设基本格式为二层任意格式,边界条件为$\omega-1$阶水平外推

$$v_\mu(t+\triangle t) = \sum_{j=1}^{\omega}\binom{\omega}{j}(-1)^{j+1}v_{\mu+j}(t+\triangle t),$$
$$(\mu = 0, \cdots, r-1) \tag{2.11}$$

故得特征方程:

$$R(z,x) = R(x) = 1 - \sum_{j=1}^{\omega}\binom{\omega}{j}(-1)^{j+1}x^j = (1-x)^\omega.$$

故$R(z,x)=R(x)\neq 0$,($x\neq 1$)这直接给出(2.6$_{a,c}$).因为基本格式

为两层，定理 2. $2_{(2)a}$给出(2. 6_b). 由定理 2. 1′可知为稳定. 证毕.

注意，若基本格式是多于两层，则不论是耗散或非耗散的基本格式，上述结论不成立. 下面便是这样的例子. 设基本格式为三层蛙跳格式

$$v_\mu(t+k) = v_\mu(t-k) + \lambda A[v_{\mu+1}(t) - v_{\mu-1}(t)].$$
$$(\mu = 1,2,\cdots) \qquad (2.12)$$

这是酉格式. 如果附属以边界条件

$$v_0(t+k) = 2v_1(t+k) - v_2(t+k).$$

则为不稳定的. 这因为 $R(z,x)=z(1-x)^2$ 由于 $x=1,z=-1$ 为内根. 代入边界条件的特征方程得

$$R(z,x) = z(1-x)^2 = 0, \quad 即 P(-1,1) = R(-1,1) = 0.$$

由于 $\mathrm{Det}J(z)=R(z,x)=0$，本章定理 2. 1，2. 1′不能判别，但由第二章定理 2. 5 可知为不稳定.

对于下列例子也可说明其为不稳定的. 对于三层 5 点耗散基本格式：

$$v_\mu(t+k)=[I-(\varepsilon/16)(E-I)^2(I-E^{-1})^2]v_\mu(t-\triangle t)$$
$$+\lambda A(E-E^{-1})v_\mu(t) \quad (0<\varepsilon<1, 0<\lambda A\leqslant 1-\varepsilon, \mu=2,3,\cdots)$$

这是耗散格式，证见公式(1. 24). 若边界格式为(2. 11)而特征方程为$(x-1)^\omega=0$，则由于 $x=1,z=-1$ 为内根，代入到边界的特征方程式恒为满足. 即 $\mathrm{Det}J(z)=0$，由第二章定理 2. 5 可知为不稳定.

例 2. 4 设基本格式为耗散，而边界格式为 $\omega-1$ 阶斜外推：

$$v_\mu(t+\triangle t) = \sum_{j=1}^{\omega}\binom{\omega}{j}(-1)^{j+1}v_{\mu+j}(t-(j-1)\triangle t)$$
$$(\mu = 0,1,\cdots,r-1) \qquad (2.13)$$

由于基本格式为耗散，故由定理 2. $2_{(1)}$知(2. 6_a)成立. 由于边界格式的特征函数为

$$R(z,x) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty}\binom{\omega}{j}(-1)^{j+1}z^{-j}x^{j} = (1 - z^{-1}x)^{\omega}.$$

故得

$$\Omega(z,x) \geqslant |R(z,x)| \neq 0.\ (z \neq x) \qquad (2.14)$$

由此得(2.6$_{b,c}$)成立. 由定理 2.1′得稳定性,证毕.

例 2.5 设基本格式为耗散,边界格式为二阶精度框形格式

$$v_\mu(t+k) + v_{\mu+1}(t+k) - \lambda A(v_{\mu+1}(t+k) - v_\mu(t+k))$$
$$= v_\mu(t) + v_{\mu+1}(t) + \lambda A(v_{\mu+1}(t) - v_\mu(t)).$$
$$(\mu = 0,1,\cdots,r-1)$$

这个格式为酉格式.(证见例 1.3 公式(1.30))其特征方程式为 $R(z,x)=[1+x-\lambda A(x-1)]z-[1+x+\lambda A(x-1)]$. 故当 $|x|=1\Rightarrow |z|=1$. 由此可知当基本格式为耗散时,(2.6$_a$)成立. 由定理 2.2$_{(2)c}$,可知(2.6$_b$)成立. 由于边界格式为酉格式,它满足 V−N 条件. 由引理 2.1$_{(1)}$可知 $T_{-1}=1+x-\lambda A(x-1)\neq 0$. 故为可解的. 由定理 2.2$_{(3)}$,可知(2.6$_c$)成立. 故由定理 2.1′证明了稳定性.

例 2.6 设基本格式为耗散,设边界条件为右向三层加权尤拉格式:

$$v_\mu(t+\triangle t) = v_\mu(t-\triangle t)$$
$$+ \lambda A(2v_{\mu+1}(t) - v_\mu(t+\triangle t) - v_\mu(t-\triangle t)).$$
$$(0 < \lambda A \leqslant 1, \nu = 0,1,\cdots,r-1) \qquad (2.15)$$

由定理 2.2$_{(1)}$可知(2.6$_a$)成立,而且边界格式特征方程式为 $R(z,x)=1-z^{-2}-\lambda A(2xz^{-1}-1-z^{-2})$, $R(-1,1)=0$. 因此 $\Omega(-1,1)\geqslant R(-1,1)=4\lambda A>0$. 由定理 2.2$_{(2)d}$可知(2.6$_b$)成立. 由于边界特征方程式为 $(1+\lambda A)z^2-2\lambda Azx-(1-\lambda A)=0$. 故得

$$\begin{cases} z = x(\lambda A \pm b)/(1+\lambda A), \\ b(\xi) = ((\lambda A)^2 + e^{-2i\xi}(1-(\lambda A)^2))^{\frac{1}{2}}.\ (x = e^{i\xi}) \end{cases} \qquad (2.16)$$

故得 $|x|=1$ 时，$|z|\leqslant 1$. 故 V－N 条件满足，由引理 2.1$_{(2)}$，即显式边界条件时常为可解. 由定理 2.2$_{(3)}$ 可知(2.6$_c$)成立，由定理 2.1′证明了稳定性.

例 2.7 设边界条件为(2.15)，$0<\lambda A<1$，而基本格式为非耗散的，而且特征方程式满足

$$P(-1,-1)\neq 0. \tag{2.17}$$

同前例相同，得(2.6$_b$)成立. 现证(2.6$_a$)也成立. 现令 $\rho=(\lambda A)^2$，在(2.16)中令 $0<|\xi|<\pi$ 得

$$|b(\xi)|^4=\rho^2+(1-\rho)^2+2\rho(1-\rho)\cos 2\xi$$
$$\leqslant \rho^2+(1-\rho)^2+2\rho(1-\rho)\leqslant 1.$$

由(2.16)得 $|z(x)|\leqslant(\lambda A+|b(\xi)|)/(1+\lambda A)<1.\ (0<|\xi|<\pi)$ 即

$$R(z,x)\neq 0.\ (|z|\geqslant 1,|x|=1,x\neq\pm 1) \tag{2.18}$$

由(2.16)得 $z(-1)=-(\lambda A\pm 1)/(1+\lambda A)=\begin{cases}-1,\\(1-\lambda A)/(1+\lambda A).\end{cases}$

故得

$$R(z,-1)\neq 0.\ (|z|\geqslant 1,z=-1) \tag{2.19}$$

结合(2.17)－(2.19)得

$$\Omega(z,x)=|P(z,x)|+|R(z,x)|\neq 0.\ (|z|\geqslant 1,|x|=1,x\neq 1)$$

即(2.6$_a$)满足，由定理 2.1′即得稳定性.

现考虑一些著名的非耗散基本格式并满足(2.17). 例如 Crank Nicolson 格式：

$$v_\mu(t+k)-(\lambda A/4)(v_{\mu+1}(t+k)-v_{\mu-1}(t+k))$$
$$=v_\mu(t)+(\lambda A/4)(v_{\mu+1}(t)-v_{\mu-1}(t)),\quad(\mu=1,2,\cdots) \tag{2.20}$$

其特征方程式为

$$P(z,x)=(1-(\lambda A/4)(x-x^{-1}))z$$
$$-(1+(\lambda A/4)(x-x^{-1}))=0.\ (P(-1,-1)\neq 0)$$

若$|x|=1$，得$|z|=1$，故为酉格式. 设其边界格式为几乎耗散向后尤拉格式：

$$v_\mu(t+k)-(\lambda A/2)(v_{\mu+1}(t+k)-v_{\mu-1}(t+k))=v_\mu(t),$$
$$(\mu=1,2,\cdots) \qquad (2.21)$$

其特征方程式为$[1-(\lambda A/2)(x-x^{-1})]z=1$. 由此得$|x|=1, x\neq\pm1 \Rightarrow |z|<1$.

几乎耗散格式定义 若格式的特征方程式中，除了有限个x值外，(例如前例中$x\neq\pm1$)满足关系式$|x|=1\Rightarrow|z|<1$，称为几乎耗散格式.

现在考虑几乎耗散 Lax-Friedrichs 格式：

$$v_\mu(t+k)=(v_{\mu+1}(t)+v_{\mu-1}(t))/2$$
$$+\lambda A(v_{\mu+1}(t)-v_{\mu-1}(t))/2. \ (0<\lambda A<1, \mu=1,2,\cdots)$$

其特征方程式为

$$P(z,x)=z-(x+x^{-1})/2-\lambda A(x-x^{-1})/2=0,$$

$P(-1,-1)=0$. 设$x=e^{i\xi}$, $z=\cos\xi+i\lambda A\sin\xi$. $|z|=(\cos^2\xi+\lambda^2A^2\sin^2\xi)^{\frac{1}{2}}$, $x\neq\pm1$, $|z|<1$. 故为几乎耗散格式. 此时条件(2.17)不成立. 设边界条件为(2.15)$R(z,x)=1-z^{-2}-\lambda A(2xz^{-1}-1-z^{-2})$；此时$P(-1,-1)=0$, $R(-1,-1)=0$. 因此定理 2.1 的条件(2.6)不满足. 故不保证稳定. 实则由计算可知其为不稳定.

例 2.8 现取任意二层基本格式，而边界格式是右向两步尤拉格式

$v_\mu(t+k)=v_\mu(t-k)+2\lambda A(v_{\mu+1}(t-k)-v_\mu(t-k))$ $(0<\lambda A<1/2, \mu=0,1,\cdots,r-1)$则$R(z,x)=1-z^{-2}(1+\lambda A(x-1))$. 故由$R(z,x)=0$得$z^2=[1+2\lambda A(x-1)]$ $(0<|\xi|\leqslant\pi)$故得

$$|z(e^{i\xi})|^4=(1+2\lambda A(\cos\xi-1))^2+4\lambda^2A^2\sin^2\xi$$
$$=1+4\lambda A(\cos\xi-1)+4\lambda^2A^2(\cos^2\xi+1-2\cos\xi)$$
$$=1+4\lambda A(2\lambda A-1)(1-\cos\xi)<1. \qquad (2\lambda A<1)$$

故 $|x|=1, x\neq 1, \Rightarrow |z|<1$ 为耗散. 故边界格式为显式及耗散格式，满足 V-N 条件，故得

(1)边界格式为耗散由定理 $2.2_{(1)}\Rightarrow(2.6_a)$成立.

(2)两层的基本格式由定理 $2.2_{(2)a}\Rightarrow(2.6_b)$成立.

(3)边界格式满足 V-N 条件，有界可解，由定理 $2.2_{(3)}\Rightarrow$ (2.6_c)成立.

由定理 2.1′，故为稳定.

例 2.9 考虑无条件稳定的西 Crank-Nicolson 格式(2.20)，($\lambda A\leqslant 1$)及斜外推边界条件：

$$v_0(t+k)=\sum_{j=1}^{\omega}\binom{\omega}{j}(-1)^{j-1}v_j(t-(j-1)\mathbf{k}). \quad (2.22)$$

由于(2.14)$\Omega(z,x)\geqslant|R(z,x)|=|(1-z^{-1}x)^{\omega}|\neq 0.$ $(z\neq x)$故由(2.6_b)，(2.6_c)可知它成立，只要证明

$$\Omega(z,x)=|P(z,x)|+|R(z,x)|\neq 0.$$

$$(z=x, |x|=1, x\neq 1, \lambda A\leqslant 1)$$

因为 $z\neq x$ 时(2.6_a)一定成立. 只讨论 $z=x$ 的情形

$$P(z,x)=1-\lambda A(x-x^{-1})/4-z^{-1}(1+\lambda A(x-x^{-1})/4).$$

$$(0<|\xi|<\pi, \quad \lambda A\leqslant 1) \quad (2.23)$$

由于 $P(e^{i\xi},e^{i\xi})=(1-e^{-i\xi})(1-\lambda A(1+\cos\xi)/2)$.

这因为$-\lambda A(1+x^{-1})(x-x^{-1})/4=-\lambda A(1-x^{-2})(1+x)/4$

$$=-\lambda A(1-x^{-1})(1+x^{-1})(1+x)/4$$

$$=-\lambda A(1-x^{-1})(2+x+x^{-1})/4$$

$$=-\lambda A(1-e^{\xi})(1+\cos\xi)/2. \quad (x=e^{i\xi})$$

故得$P(e^{i\xi},e^{i\xi})=(1-e^{-i\xi})[1-\lambda A(1+\cos\xi)/2]$. 故$(2.6_a)$成立，由定理 2.1′知为稳定，证毕.

例 2.10 设基本格式取几乎耗散无条件稳定向后尤拉格式(2.21)，边界格式为斜外推(2.22) 为了证明稳定性，应用上例

的同一方法，只证明 $z=x=e^{i\xi}$时

$$P(z,x)=1-\lambda A(x-x^{-1})/2-z^{-1}\neq 0.$$

$$(0<|\xi|\leqslant\pi) \qquad (2.24)$$

因为 $P(e^{i\xi},e^{i\xi})=1-\cos\xi+i(1-\lambda A)\sin\xi\neq 0(\xi\neq 0)$故(2.6。)成立，由定理 2.1′故为稳定.

§2.3 主要定理的证明及例

为了证明定理 2.1 及 2.2，我们考虑在(2.3)中的特征函数 $P(z,x)$. 对于每一个 z, $|z|\geqslant 1$ 在(2.3)$P(z,x)=\sum_{j=-r}^{p}A_j(z)x^j$ 中，由§1 假定 1.4 对于每个 $|z|\geqslant 1$ $P(z,x)=0$ 有 $r+p$ 个根 $x(z)$. 这些根具有下列分离的性质.

引理 2.2 对于 $|z|>1$，基本特征方程式恰有 r 个根 $|x(z)|<1$ 及 p 个根 $|x(z)|>1$ 而且没有 $|x(z)|=1$ 的根.

这就是引理 1.7. 前节已经证明. 由极限关系即得：

引理 2.3 对于 $|z|\geqslant 1$，基本特征方程式 $P(z,x)=0$ 的根分开为 r 个内根，$0<|x|\leqslant 1$ 及 p 个外根 $|x(z)|\geqslant 1$.

由前节§1.4 定理 1.7 可得下列判别稳定性方法.

定理 2.3 差分逼近(2.1)为稳定的，当只当对于每一个 $|z|\geqslant 1$ 及 $P(z,x)$的每个内根及对应的边界特征函数 $R(z,x)$满足

$$R(z,x(z))\neq 0. \qquad (2.25)$$

故得

引理 2.4 差分逼近(2.1)为稳定的，当只当$\forall z$：$|z|\geqslant 1$ 及每一个 $P(z,x)$的内根 $x(z)$满足

$$\Omega(z,x(z))=|P(z,x(z))|+|R(z,x(z))|\neq 0. \qquad (2.26)$$

现讨论 $z=1$ 的内根的一些结果. 由§1.5 的引理 1.11 得：

引理 2.5 若 $z=1$，则 $x=1$ 当 $A>0$ 时是 $P(z,x)$的外根.

定理 2.1 的证明 对于$\forall z$：$|z|\geqslant 1$，设 $x(z)$是对应 $P(z,$

x)的内根. 若 $z\neq1$, 由引理 2.3 可知 $0<|x(z)|\leqslant1$. 故由(2.5)即可得(2.26). 若 $z=1$, 由引理 2.5 可知 $x(z)=1$ 是外根. 由引理2.3 知 $0<x(z)\leqslant1, x(z)\neq1$. 故由(2.5)也得到(2.26). 由引理 2.4 可知差分逼近(2.1)为稳定, 证毕.

定理 2.2 的证明

(1)若基本格式或边界条件为耗散, 故得

$P(z,x)\neq0, (|z|\geqslant1, |x|=1, x\neq1)$ 或

$R(z,x)\neq0. (|z|\geqslant1, |x|=1, x\neq1)$

故(2.6$_a$)成立.

(2$_a$)因为基本格式同 $u_t=Au_x$ 相容, 至少有一阶精度, 满足相容条件 $\sum_{j=-r}^{p}(A_{j,1}-\sum_{\sigma}A_{j\sigma})=0$. 即

$$P(1,1)=0. \tag{2.27}$$

由假定此基本格式为二层的, 故 $P(z,1)$ 是关于 z^{-1} 的一次方程式, 只有一个根 $P(1,1)=0$. 得 $P(z,1)\neq0. (|z|\geqslant1, z\neq1)$ 故得(2.6$_b$)成立.

(2$_b$)在三层情形, (2.27)仍成立. 但是现在 $P(z,1)$ 是关于 z^{-1} 为二次方程式, 并具有实系数, 由(2.27)可知 $z^{-1}=1$ 是其中的一个根, 因此其它的根也为实的. 因此

$$P(z,1)\neq0, \quad (|z|=1, z\neq\pm1) \tag{2.28}$$

而且基本格式满足 V-N 条件, 故

$$P(z,1)\neq0. \quad (|z|>1) \tag{2.29}$$

(因 $|x|=1\Rightarrow|z|\leqslant1$ 的原故)由(2.28), (2.29)得

$$\Omega(z,1)\neq0. \quad (|z|\geqslant1, z\neq\pm1) \tag{2.30}$$

再由条件(2.9)即得(2.6$_b$)成立.

(2$_c$)的证明同(2$_a$)相同, 只是把 $P(z,x)$ 改为 $R(z,x)$ 而已. 并把 $R(1,1)=0$ 代替(2.27)即得.

(2_d)的证明，这时仍有(2.29)$P(z,1)\neq 0.(|z|>1)$. 因为基本格式满足 V-N 条件，而边界条件是二层的. (2.28)是由

$$R(z,1)\neq 0,\quad (|z|=1, z\neq \pm 1) \tag{2.31}$$

所代替. 由(2.29)，(2.31)得(2.30). 再由(2.9)得(2.6_b).

(3)因为边界条件是有界可解，由引理 $2.1_{(1)}$得

$$T_{-1}(x)=\sum_{j=0}^{q}C_{j,-1}x^j\neq 0.\quad (0<|x|\leqslant 1) \tag{2.32$_a$}$$

再由(2.1_c)及(2.10)得

$$T_{-1}(0)=C_{0,-1}\neq 0. \tag{2.32$_b$}$$

由$(2.32_{a,b})$得

$$T_{-1}(x)\neq 0.\quad (|x|\leqslant 1) \tag{2.33}$$

因此函数 $z^{q+1}R(z,x)$是 z 及 x 的多项式，可书为

$$z^{q+1}R(z,x)=(z-z_1)\cdots(z-z_d)R_0(z,x), \tag{2.34}$$

其中 $R_0(z,x)$是 x 的多项式，其最高系数为非零常数，其它的系数为关于 z 的有理函数. 由假定 1.5

$$R(z,x)=\sum_{j=0}^{m}C_j(z)x^j$$

对于$|z|\geqslant 1$ 关于 x 是非零多项式，故在(2.34)中必满足$|z_j|<1$. $(j=1,\cdots,d)$否则当$|z|\geqslant 1$ 时，$R(z,x)$变为零次多项式. 由此可知 $z^{q+1}R(z,x)$的最高系数(是 x 的多项式)对于$|z|\geqslant 1$ 有异于零的界. 因此 $z^{q+1}R(z,x)$的根也是 $R(z,x)$的根 $x=x(z)$对于$|z|\geqslant 1$ 是 z 的连续函数.

由假定，边界条件满足 Von-Neumann 条件，故对于$|z|>1$ 函数 $R(z,x)$在$|x|=1$ 上不为零. 由连续性，$R(z,x)$的根 $x=x(z)$满足$|x(z)|\leqslant 1$，它的个数同$|z|>1$ 的 z 无关. $|x|\leqslant 1$ 的根的数目等于函数 $z\to\infty$时 $R(z,x)\equiv T_{-1}(x)=0$ 的根的数目. 由(2.33)可知 $R(z,x)$在$|z|>1$ 时没有$|x|\leqslant 1$ 的根. 故 $R(z,x)$的根当$|z|>1$ 时

满足 $|x(z)|>1$. 由于根的连续性，因此对于 $|z|\geqslant 1$ 时根满足 $|x(z)|\geqslant 1$. 即 $R(z,x)\neq 0,|x|<1,|z|\geqslant 1$. 即 (2.6_c)，证毕.

注 2.1 **§1.3 的定理 1.4 可由定理 2.1 证明.** 这是因为它可由本节定理证明. 由定理 $2.2_{(1)-(3)}$ 可知 $(2.6_{a,c})$ 成立. 由假定 $1.2_{(1)}$ 得 $P(z,1)\neq 0,(|z|>1)$ 再由 (1.25) 得 $\Omega(z,1)\neq 0.(|z|\geqslant 1,z\neq 1)$ 故定理 2.1，(2.6_b) 成立而得到稳定性，即证明 §1.3 的定理 1.4.

§1.3 的定理 1.5 可由本节定理证明. 由定理 $2.2_{(1)-(3)}$ 得 $(2.6_{a,c})$ 成立. 由 (1.25) 及 (2.29) 得 (2.6_b) 成立. 由定理 2.1 可知 §1.3 定理 1.5 成立.

§1.3 的定理 1.2 可由本节定理证明. 这因为

①由基本格式为耗散，由定理 $2.2_{(1)}\Rightarrow(2.6_a)$，

②由基本格式为二层，由定理 $2.2_{(2)(4)}\Rightarrow(2.6_b)$，

③$R(z,x)\neq 0,|z|\geqslant 1,0<|x|<1\Rightarrow(2.6_c)$

故由本节定 2.1 可知为稳定.

§1.3 的定理 1.3 也可由本节定理证明. 这因为

①由定理 2.2(1)$\Rightarrow(2.6_a)$成立

②由定理假定 $(1.22)\Rightarrow(2.6_c)$成立，

③由 V-N 条件满足故得 $P(z,x)=0,|x|=1\Rightarrow|z|\leqslant 1$. 由此得 $P(z,x)\neq 0.(|z|>1,|x|=1)$ 故 $P(z,1)\neq 0,(|z|>1)$；$R(z,1)\neq 0.(|z|=1,z\neq 1)$ 由此得 $\Omega(z,1)\neq 0,(|z|\geqslant 1,z\neq 1)$ 即 (2.6_b) 成立. 故由本节定理 2.1 可知为稳定.

注 2.2 例 2.1—2.6 包含了 §1 中的所有主要例子. 例 2.3 是非耗散的基本格式，而例 2.7—2.10 是新的例子，而且不可能用 §1 的结果判别稳定. 对于例 2.3、2.7、2.9 及 2.10 不能用 §1 的定理 1.2—1.5 判别稳定性. 因为它尚需要基本格式，或边界条件为耗散. 对于例 2.8 基本格式不一定是耗散，但边界条件为耗

散，尚希望§1的定理1.5有所帮助，但是因为$R(-1,1)=0$，故§1公式(1.25)不满足，故定理1.5也不能应用.

注2.3　B. Gustafsson 已指出，基本格式为蛙跳格式(并记为LF)LF：$v_\nu(t+k)=v_\nu(t-k)+\lambda A(v_{\nu+1}(t)-v_{\nu-1}(t))$，$(\nu=1,2,\cdots)$　(2.12). 边界条件为线性斜外推 $v_0(t+k)-2v_1(t)+v_2(t-k)=0$ 是稳定的.

现证明这个结果. 这是由 $P(z,x)=z-z^{-1}-\lambda A(x-x^{-1})=0$，$R(z,x)=(z-x)^2=0$. 故由 G. K. S. 稳定性判别法只证 $z\neq x$ 即可. 其中 x 为 $P(z,x)=0$ 的内根. 这可以由下列引理得出(参看[5] P. 663，引理6.2)

引理2.6　对于蛙跳(LF)格式的内根 x_1 满足下列关系：

①若 $|z|>1$ 则　$|x_1|<1$；$(R_e x_1<0, R_e z>0)$

②若 $|z|=1$，则　1)　$\sin\theta>\lambda A$ 时，$|x_1|<1$，$|x_2|>1$；$(z=e^{i\theta})$

2)　$\sin\theta\leqslant\lambda A$ 时，$x_1=\sin\theta/\lambda A-(1-\sin^2\theta/\lambda^2A^2)^{1/2}$，$|x_2|=1$；

$R_e x_1$ 同 $R_e z$ 异号，$(\therefore z\neq x_1)$；$\theta=0\ (z=1)$ 时，$x_1=-1$，$x_2=1$；$\theta=\pi(z=-1)$ 时，$x_1=1$，$x_2=-1$；$\sin\theta=\pm\lambda A$ 时 $x_1=x_2=\pm i$.

由上述引理，对于上例可知 $z\neq x_1$，故 $\det J(z)=R(z,x)\neq 0$. 故依据第二章定理2.5的 G. K. S. 稳定性判别法知为稳定，证毕.

但对于上述这个稳定例子，我们有 $\Omega(-1,-1)=|P(-1,-1)|+|R(-1,-1)|=0$. 故由(2.5)$\Omega(z,x)=|P(z,x)|+|R(z,x)|\neq 0$ 不成立，$(|z|\geqslant 1, |x|\leqslant 1, (z,x)\neq(1,1))$. 因此定理2.1的条件不满足，这说明条件(2.5)只是判别稳定性的充分条件，不是必要条件.

注2.4　此处指出，假定1.5对于差分逼近(1.4)稳定性的判别是必需的，实则若假定1.5在 $z=z_0$ 点 $|z_0|\geqslant 1$ 不成立，因此得

$$R(z_0,x) \equiv \sum_{j=0}^{m} C_j(z_0)x^j = 0. \quad (\text{因 } C_j(z_0)=0) \quad (2.35)$$

即 $R(z_0,x)$ 是关于 x 的零次多项式. 由引理 2.3 可知基本格式的特征方程式 $P(z,x)=0$ 有 r 个内根 $x(z_0)$, $0<|x(z)|\leq 1$, 对其中的每一个根均有 $R(z_0,x(z_0))=0$. 由公式(2.25)及定理 2.3 可知其为不稳定的. 因此说明了假定 1.5 是非常必需的.

例 2.11 设任耗散基本格式, 其边界条件为二层零阶垂直外推:

$$v_\mu(t+k)=v_\mu(t). \quad (\mu=0,1,\cdots,r-1) \quad (2.36)$$

明显地, 这是显式边界条件它是有界可解的. $R(z,x)=z-1$. 故满足 V-N 条件. $(z=1)$ 故定理 2.2 条件满足. 由定理 2.1 似乎为稳定的. 这格式实则由计算可知不稳定. 其原因是假定 1.5 不成立. 因为

$$\sum_{j=0}^{m} |C_j(z)|_{z=1} = |1-z^{-1}|_{z=1}=0.$$

这说明了假定 1.5 是很重要的.

注 2.5 我们已知边界条件的精度(关于精度概念见第一章 § 4.1 假定 5 后面的说明)是对于决定总体精度起了一个重要的作用. 实则 B. Gustafsson 已指出,[16] 若差分逼近(2.1)的基本格式的精度为 δ, 若边界格式的精度为 $\delta-1$, 则总体精度仍保持为 δ.

现在, 若用水平或斜外推(2.11)或(2.13), 那么对于边界精度没有任何限制. 但边界条件要满足某些性质并使其为最高精度问题是很困难的. 例如我们不难看出大多数边界条件是关于纯初值问题为柯西稳定的. 因此具有形式(2.1c)的最高精度的稳定边界格式是那些? G. Strang 提出了形如(2.1c)的稳定二层边界格式的精度不超过 2 阶. 但是多层稳定边界条件(2.1c)仍可以具有任意的 q 阶精度.[15]

第四章 双曲型方程差分逼近的混合初边值问题及套网格方法

§1 双曲型方程差分逼近的混合初边值问题

§1.1 引言 在双曲型方程混合初边值问题差分方法中时常对于内点基本格式应用高阶差分逼近，配合以边界上的低阶差分逼近. 对于边界上的低阶逼近式应用更小的步长，可以保持同内点格式相协调的误差. 现对模型方程 $u_t+cu_x=0$ 的初边值问题进行数值计算. 内点格式为关于空间的四阶精度，并于时间为二阶精度. 但在边界上均用二阶精度格式. 由于四阶差分逼近方法比二阶差分逼近方法更为精确，但应用于初边值问题，困难产生了，因在边界上不能直接应用格式. 故对于内点格式用高阶差分逼近，而边界格式用低阶差分逼近的互相耦合方法是很有吸引人的方法. 由 B. Gustafsson[16] 所建立，关于边界格式取低一阶精度的格式，并不影响总体精度. 计算实例也说明了这事实. 故对于低阶精度的差分逼近，可用更密一些的网格，即可保持总体精度.

这在实际上有很大的应用. 在海洋学上的边界层现象，比内部更为复杂. 因此要用比较细的网格以适用于边界较低精度的格式. 因为边界对于计算有更强的影响.

在§1.2中，考虑模型方程式：

$$u_t + cu_x = 0, \quad (c < 0, a \leqslant x \leqslant b, t \geqslant 0) \tag{1.1}$$

$$u(x,o) = f(x), \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1.2}$$

$$u(b,t) = g(t). \quad (t \geqslant 0) \tag{1.3}$$

并具有相容条件 $f(b)=g(o)$. 首先考虑逼近于(1.1),(1.2),(1.3)的中心差分格式. 它关于空间为四阶，关于时间为二阶作为内点基本格式. 并在边界用二阶蛙跳格式配合. 计算发现其为不稳定，除非应用同一宽度的网格. 因此这方法在应用上有所限制. 若在边界上用 Lax－Wendroff 逼近式，则混合方法是稳定.

在§1.2末尾，对于双曲型方程组的上述方法作一个一般的讨论.

§1.2 方法的叙述及稳定性的证明

现对于(1.1),(1.2),(1.3)求其差分逼近. 在不失一般性之下，取 $a=0, b=1$. 设 $k>0$ 为时间步长，内点网格的步长为 $h_c=1/N$. 边界附近加细 M 倍的网格步长是 $h_f=h_c/M$. M 为某自然数. 即 $h_c=1/N, h_f=h_c/M, \lambda_c=k/h_c, \lambda_f=k/h_f=M\lambda_c$. 设 $v_\nu(t)=v(\nu h_c,t)$ 为网格函数. 左边界附近网格函数用 $l_\nu(t)=l(\nu h_f,t)(\nu=0,\cdots,2M)$ 而右边界网格函数用 $r_\nu(t)=r(1-h_c+\nu h_f,t)\quad(\nu=0,1,\cdots,M)$ 其中 $t=0,k,2k,\cdots$.

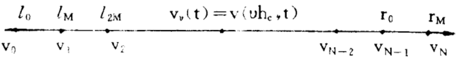


图 四

对于(1.1)在 $2\leqslant\nu\leqslant N-2$ 中用 $O(h_c^4+k^2)$ 的4阶修正LF差分逼近.

$$LF_4:\quad v_\nu(t+k)=v_\nu(t-k)-2ck[4D_0(h_c)/3 - D_0(2h_c)/3]v_\nu(t),\ (2\leqslant\nu\leqslant N-2) \qquad (1.4_a)$$

其中 $D_0(nh_c)v_\nu(t)=(v_{\nu+n}(t)-v_{\nu-n}(t))/(2nh_c)$.

现在证明 LF_4 在 $|\lambda_c C|\leqslant 6/(9+24\sqrt{6})^{1/2}=0.728745$ 条件下为酉格式,并为柯西稳定.(1.4a)又可书为形式

$v_\nu^{n+1}=v_\nu^{n-1}-2ck[4(v_{\nu+1}^n-v_{\nu-1}^n)/(6h_c)-(v_{\nu+2}^n-v_{\nu-2}^n)/(12h_c)]$

令 $v_j^n=z^nx^j$ 代入上式得特征方程 $z-z^{-1}=-\lambda_c c[4(x-x^{-1})/3-(x^2-x^{-2})/6]$. 再令 $x=e^{i\theta}$ 代入($\lambda_c=k/h_c$)上式令 $\alpha=ic\lambda_c\mathrm{Sin}\theta(4-\cos\theta)/3$ 得 $z^2+2\alpha z-1=0$ 解之得 $z=-\alpha\pm\sqrt{1+\alpha^2}=-\alpha\pm(1-c^2\lambda^2\mathrm{Sin}^2\theta(4-\cos\theta)^2/9)^{1/2}$ 其中取 $c\lambda_c\leqslant(9/(\mathrm{Sin}^2\theta(4-\cos\theta)^2))^{\frac{1}{2}}$.

但 $\min\limits_{|\theta|\leqslant\pi}(9/(\mathrm{Sin}\theta(4-\cos\theta))^2)^{1/2}=6/(9+24\sqrt{6})^{1/2}$. 这是因为令 $y=\cos\theta$, 则 $\sigma=\mathrm{Sin}^2\theta(4-\cos\theta)^2=(1-y^2)(4-y)^2$. $(-1\leqslant y\leqslant 1)$ 求极大小. $\sigma'=-2y(4-y)^2-2(4-y)(1-y^2)=-2(4-y)(1+4y-2y^2)$ 由 $2y^2-4y-1=0$ 得 $y=1\pm\sqrt{6}/2$ ∴ $\sigma=16.94694$, 故得 $\min(9/(\mathrm{Sin}\theta(4-\cos\theta))^2)^{1/2}=0.728745$. 故在此条件下 $|x|=1$, ⇒ $|z|=1$, 故为酉格式. 也满足 V-N 条件.

在区间 $[0,2h_c]$ 中, 用 $O(h_f^2+k^2)$ 的LF差分逼近式

$$LF:\quad l_\nu(t+k)=l_\nu(t-k)-2ckD_0(h_f)l_\nu \qquad (1.5_a)$$
$$(\nu=1,2,\cdots,2M-1)$$

或书为形式 $l_\nu^{n+1}=l_\nu^{n-1}-c\lambda_f(l_{\nu+1}^n-l_{\nu-1}^n)$ 而且在 $x=0$ 点不能用上式, 因为 l_{-1}^n 没有定义, 故用 $O(h_f+k^2)$ 的格式来计算, 即

$$l_0(t+k)=l_0(t-k)-2c\lambda_f[l_1(t)-(1/2)(l_0(t-k)+l_0(t+k))]. \qquad (1.5_b)$$

或书为形式 $l_0^{n+1}=l_0^{n-1}-2c\lambda_f(l_1^n-(l_0^{n-1}+l_0^{n+1})/2)$. 在区间 $(1-h_c,1)$ 中用 $O(h_f^2+k^2)$ 及 $O(h_f+k^2)$ 差分逼近

LF： $r_\nu(t+k)-r_\nu(t-k)=-2ckD_0(h_f)r_\nu(t)$,

$$(\nu=1,\cdots,M-1) \tag{1.6$_a$}$$

$$r_0(t+k)-r_0(t-k)=-2c\lambda_f[r_1(t)-(r_0(t+k)+r_0(t-k))/2]. \tag{1.6$_b$}$$

对应于初值(1.2)用格式：

$$v_\nu(0)=f(\nu h_c),\quad (\nu=0,1,\cdots,N) \tag{1.4$_b$}$$

$$l_\nu(0)=f(\nu h_f),\quad (\nu=0,\cdots,2M) \tag{1.5c}$$

$$r_\nu(0)=f(1-h_c+\nu h_f).\quad (\nu=0,\cdots,M) \tag{1.6$_c$}$$

对应于边界条件(1.3)用格式

$$r_M(t)=g(t).\quad (t=0,k,2k\cdots) \tag{1.5$_d$}$$

现在对于网格函数 $l_\nu(t),v_\nu(t),r_\nu(t)$ 其相互关系为：

$$\begin{cases} v_0(t)=l_0(t),v_1(t)=l_M(t),v_2(t)=l_{2M}(t), \\ v_{N-1}(t)=r_0(t),v_N(t)=r_M(t),\quad (t=0,k,2k,\cdots) \end{cases} \tag{1.4$_c$}$$

但尚要给出下列函数，才能对方程求解

$$\begin{cases} v_\nu(t)=w(\nu h_c),\quad (\nu=0,1,\cdots,N) \\ l_\nu(t)=w(\nu h_f),\quad (\nu=0,1,\cdots 2M) \\ r_\nu(t)=w(1-h_c+\nu h_f),\quad (\nu=0,1,\cdots,M) \end{cases} \tag{1.4$_d$}$$

其中 w 是对于解 $u(x,k)$ 充分接近的网格函数.

很明显地，方程式(1.4),(1.5),(1.6)唯一决定了对应方程式(1.1),(1.2),(1.3)的差分逼近，并同其相容.

单边格式(1.5$_b$),(1.6$_b$)是由 A. Sundström 所提出的，可证下列性质.

引理 1.1　(1.5$_a$),(1.5$_b$)的初边值问题为稳定.

引理 1.2 (1.6a)、(1.6b)的初边值问题为稳定.

引理 1.3 对于(1.5a)的特征方程式:

$P(z,x)=z-z^{-1}-\lambda_f a(x-x^{-1})$, $(a=-c>0)$的根 x 有下列性质:

(1)在$|z|>1$时, $|x_1|<1$, $|x_2|>1$, Rex_1同 Rez 异号. 当$|x|=1$, $z^2-2z\lambda_f ai\sin\theta-1=0$. 令$\alpha=\lambda_f ai\sin\theta$, 则 $z=\alpha\pm\sqrt{1+\alpha^2}$在$|\lambda_f\alpha|<1$时$\Rightarrow|z|=1$. 即为酉格式,故$|z|>1$时内根,外根(内根外根概念见第一章§4.3)分离.(即被$|x|=1$所隔开)

(2)在$|z|=1$,令$z=e^{i\theta}$可证

1) $|\sin\theta|>\lambda a$时, $|x_1|<1$, $|x_2|>1$. 故内外根也分离.

2) $|\sin\theta|\leq\lambda a$, $|x_1|=1$, $|x_2|=1$,特别当

$$\begin{cases}\theta=0,(z=1),x_1=-1;\theta=\pi(z=-1),\\ \qquad x_1=1;\\ \sin\theta=\pm\lambda a, x_1=x_2=i.\end{cases}$$

(引理 1.3 证明见[3]P.663 中引理 6.2)

利用引理 1.3 可以证明引理 1.1,引理 1.2.

引理 1.1 证明 由于(1.5a)的特征方程式为

$P(z,x)=z-z^{-1}-\lambda_f a(x-x^{-1})$. $(a=-c>0)$

由引理 1.3 知$R_e x_1<0$, $R_e z>0$;或$R_e x_1>0$, $R_e z<0$. 求(1.5b)的特征方程式为(即用$l_v(t_n)=z^n x_1^v\alpha$代入)

$$\alpha(z-z^{-1}-2\lambda_f a(x_1-(1/2)(z+z^{-1})))=0.$$

由引理 1.3 得:

①$|z|>1$. $R_e[z-z^{-1}-2\lambda_f a(x_1-(1/2)(z+z^{-1}))]\neq0$,且与 z 同号,故为稳定.

②$|z|=1$. 1) $|\sin\theta|>\lambda a$ 同理可得

$$R_e[z-z^{-1}-2\lambda_f a(x_1-(z+z^{-1})/2)]\neq0,$$

且与 z 同号，故稳定.

$$2)\ |\mathrm{Sin}\theta|\leqslant\lambda a,\ |x_1|=|x_2|=1，\text{同理}$$

$$R_e[z-z^{-1}-2\lambda_f a(x_1-(z+z^{-1})/2)]\neq 0,$$

故稳定. 特别

$\theta=0, z=1. x_1=-1. z-z^{-1}-2\lambda_f a(x_1-(z+z^{-1})/2)=4\lambda_f a\neq 0.$

$\theta=\pi, z=-1. x_1=1. z-z^{-1}-2\lambda_f a(x_1-(z+z^{-1})/2)=-4\lambda_f a\neq 0.$

因此在任何情形下均得 $\mathrm{Det}J\neq 0$，由第二章定理 2.5 可知其为稳定.

引理 1.2 的证明　对于 (1.6_a)，(1.6_b) 的证明相似，只是把 l_r 改为 r_r 而已. 现从略.

注意 (2.5_b)，(2.6_b) 只有 $O(h_f+k^2)$ 精度. 由于 B. Gustafsson 的结果[15]可知，总体精度并不影响.

假定　现假定 λ_e，λ_f 均满足有关问题 (1.4_a)，(1.5_a)，(1.6_a) 的纯初值稳定性的条件，即

$$|c\lambda_e|\leqslant 6/(9+24\sqrt{6})^{1/2}=0.728745,\ |c\lambda_f|\leqslant 1.$$

现在考虑由(1.4)，(1.5)，(1.6)差分逼近的稳定性. 用 G.K.S. 稳定性的概念，并建立关于双边值问题的稳定性（参看第二章定理 2.6）. 现已知它等价于两个相关四分之一平面的单边值问题的稳定性. 即可把其中的一个边界移向无限而得到的右向或左向四分之一平面的初边值稳定问题.

（一）关于左方四分之一平面问题（$-\infty<x\leqslant 1, t>0$）的稳定性. 即把 (1.4_a) 的指标 ν 推广到负整数. 得到 G.K.S. 稳定概念. 并由下列引理即可得到.

引理 1.4　设

① (1.4_a) 关于柯西纯初值问题为稳定. 即设 $|C\lambda_e|\leqslant 0.728745$.

②(1.6$_a$),(1.6$_b$)在$[1-h_c,1]$中为柯西稳定. 即设$|c\lambda_f|\leqslant 1$.

③$v_{N-1}(t)$在任何有限区间中是有界的.

④相互协调条件为

$$v_N(t)=r_M(t),v_{N-1}(t)=r_0(t), \qquad (1.4_e)$$

$$r_M(t)=g(t). \qquad (1.6_d)$$

则混合初边值$(-\infty<x\leqslant 1)$问题(1.4$_a$),(1.6$_{a,b}$),(1.4$_e$),(1.6$_d$)为G.K.S.稳定.

证 (1)因为(1.4$_a$)的特征方程式为

$$z-z^{-1}=-c\lambda_c(4(x-x^{-1})/3-(x^2-x^{-2})/6).$$

或书为形式$x^2(z^2-1)/z^2=-c\lambda_c[4(x^3-x)/3-(x^4-1)/6]/z$.

因此当$z\to\infty$时,上式有两个内根$x\to 0$. 由连续性可知(1.4$_a$)的特征方程式有两个内根及两个外根.

(2)上述问题可看为两个格式(1.4$_a$),$(-\infty<x\leqslant 1)$及(1.6$_a$)$(1-h_c<x<\infty)$在$x=1-h_c,x=1$两点相互耦合(1.4$_e$)$v_N(t)=r_M(t),v_{N-1}(t)=r_0(t)$,(1.6$_e$)$r_M(t)=g(t)$,的稳定性问题. 因此在$(-\infty<x\leqslant 1)$中,把(1.4$_a$)用反射变换变为(1.4$_a'$),其特征方程只不过把原来特征方程中c改变符号. 故同样尚有两个外根及两个内根x_3,x_4. 因此问题变为(1.4$_a'$),(1.6$_a$),(1.4$_e$),(1.6$_d$)的初边值稳定问题. (因(1.6$_{a,b}$)已为初边值稳定)把(1.4$_a'$)的解来表示为$v_\nu^n=z^n(\alpha_1x_3^\nu+\alpha_2x_4^\nu)$. 而对于方程式(1.6$_a$)在$(1-h_c,<x<\infty)$用其特征方程式$z^2-1+c\lambda_f(x-x^{-1})z=0$的内根$\zeta_1$,把它的解表示为$r_\nu^n=z^n\alpha_3\zeta_1^\nu$ 故得$v_N(t_n)=z^n(\alpha_1x_3^N+\alpha_2x_4^N),v_{N-1}(t_n)=z^n(\alpha_1x_3^{N-1}+\alpha_2x_4^{N-1}),r_M(t_n)=z^n\alpha_3\zeta_1^M,r_0(t_n)=z^n\alpha_3\zeta_1^0$. 把它代入协调条件(1.4$_e$),(1.6$_d$)得

$$\begin{cases}\alpha_1x_3^{N-1}+\alpha_2x_4^{N-1}-\alpha_3\zeta_1^0=0,\\ \alpha_1x_3^N+\alpha_2x_4^N-\alpha_3\zeta_1^M=0,\\ \alpha_3\zeta_1^M=\bar{g}(t)\end{cases}$$

为了决定 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，要当齐次方程式时只有零解即可. 故得

$$\mathrm{Det}J = \begin{vmatrix} x_3^{N-1} & x_4^{N-1} & 1 \\ x_3^N & x_4^N & \zeta_1^M \\ 0 & 0 & \zeta_1^M \end{vmatrix} = \zeta_1^M x_3^{N-1} x_4^{N-1}(x_4 - x_3) \neq 0.$$

若 $x_3=x_4$ 为重根时，令

$v_\nu^n = z^n(\alpha_1+\nu\alpha_2)x_3^\nu$　　得

$$\mathrm{Det}J = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} x_3^{N-1} & (N-1)x_3^{N-1} & 1 \\ x_3^N & Nx_3^N & \zeta_1^M \\ 0 & 0 & \zeta_1^M \end{vmatrix} = x_3^{2N-1}\zeta_1^M \neq 0.$$

故把不同格式耦合稳定问题，重新阐述为初边值问题，再由第一章§4 定理 1 的判别法则，可知对于混合问题(1.4_a)，$(1.6_{a,b})$，(1.4_c)，(1.6_d)为稳定的. 引理 1.4 证毕.

（二）关于右方四分之一平面问题. 当$(0\leqslant x<\infty, t\geqslant 0)$，首先要求$(1.4_a)$对于 ν 为一切自然数时，为柯西稳定. 这时前面已证，当 $|c\lambda_1|\leqslant 0.728745$ 时为柯西稳定. 其次讨论(1.5_a)中的 ν 扩展到负整数时同(1.4_a)的相互耦合稳定性问题. 这个耦合问题已由第二章§1 中叙述. 但也可以用 G. K. S. 理论推广到此地. 因为可以设想把 x 轴在原点相折叠，而考察对于向量$(v_\nu, \tilde{l}_{M\nu})$的初边值问题，$\tilde{l}_{M\nu}=l_{-M\nu}$. 而新的网格如下图所示：

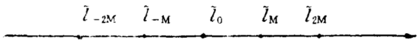


图 五

其中$(v_\nu, \tilde{l}_{M\nu})'$，是下列微分方程式的差分逼近的解.

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_x, \quad (0 \leqslant x < \infty, t \geqslant 0, c < 0)$$

其边界条件为 $w(0,t) = u(0,t)$. 此技巧已在 M. Ciment[2],[3],[17]中应用. 在此变换下，条件 $v_2(t) = l_{2M}(t)$, $v_1(t) = l_M(t)$, $v_0(t) = l_0(t)$，变为

$$v_2(t) = \tilde{l}_{-2M}(t), v_1(t) = \tilde{l}_{-M}(t), \quad v_0(t) = \tilde{l}_0(t). \quad (1.4_c)$$

而且(1.5.)变为

$$\tilde{l}_\nu(t+k) = \tilde{l}_\nu(t-k) + 2kcD_0(h_f)\tilde{l}_\nu(t). \qquad (1.5_a')$$

$$(\nu = -2M+1, -2M+2, \cdots, 0, 1, 2, \cdots,)$$

由此可看到，依据 G. K. S. 稳定性定义判别耦合稳定的条件为对于$|z| \geqslant 1$使行列式 $\mathrm{Det}J(z) \neq 0$. 此行列式是将(1.4.)，(1.5.')的具有形式 $v_\nu(t_n) = z^n x^\nu$，$\tilde{l}_\nu = z^n \zeta^\nu$ 的属于 L_2 的解的线性组合代入边界条件而得. v_ν，$\tilde{l}_\nu$ 要满足

$$\| v(t) \|_{l_2}^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_c |v_\nu(t)|^2 < \infty$$

$$\| \tilde{l}(t) \|_{l_2}^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_f |\tilde{l}_\nu(t)|^2 < \infty.$$

这些方程(1.4.)，(1.5.')一般解用下形式表示

$$v_\nu(t_n) = z^n(\alpha_1' x_1^\nu + \alpha_2' x_2^\nu), \tilde{l}_\nu(t_n) = z^n(\alpha_3' \zeta_1^\nu).$$

其中 x_1, x_2 为(1.4.)的特征方程式

$$x^4 - 8x^3 - 6(z^2-1)x^2/(c\lambda z) + 8x - 1 = 0.$$

的内根. ζ 为 $z - z^{-1} = c\lambda_f(\zeta - \zeta^{-1})$的内根. 把它代入(1.4c)得：$\alpha_1' x_1^2 + \alpha_2' x_2^2 - \alpha_3 \zeta^{2M} = 0$，$\alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 - \alpha_3' \zeta^{M} = 0$，$\alpha_1' + \alpha_2' - \alpha_3' = 0$. 其系数矩阵的行列式是

$$\mathrm{Det}J(z) = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \zeta^{-2M} \\ x_1 & x_2 & \zeta^{-M} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (x_1 \neq x_2) \qquad (1.7_a)$$

若为重根时则用 $v_\nu(t_n) = z^n(\alpha_1 - \nu\alpha_2)x^\nu$，$l_\nu = z^n\zeta^\nu\alpha_3$ 代入(1.4$_c$)后得 $(\alpha_1+2\alpha_2)x_1^2 - \alpha_3\zeta^{-2M} = 0$，$(\alpha_1+\alpha_2)x_1 - \alpha_3\zeta^{-M} = 0$，$\alpha_1 - \alpha_3 = 0$. 其系数矩阵的行列式是：

$$\mathrm{Det}J(z) = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} x_1^2 & 2x_1^2 & \zeta^{-2M} \\ x_1 & x_1 & \zeta^{-M} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1.7_b)$$

其中 $|x_2| \leqslant 1$，$|\zeta| \leqslant 1$ 而 x_1, x_2 是

$$x^4 - 8x^3 - 6(z^2 - 1)x^2/(c\lambda_c z) + 8x - 1 = 0 \qquad (1.8)$$

的内根，而 ζ 为

$$\zeta^2 - (z^2 - 1)\zeta/(c\lambda_c z) - 1 = 0 \qquad (1.9)$$

的内根. 现分开下列 $|z|>1$，$|z|=1$ 两种情形讨论.

(1) $|z|>1$ 的情形

这时 $|c\lambda_c| \leqslant 0.728745$ (1.8)的内根有 $|x|<1$. 因为如果 $|x|=1$ 时，可推出 $|z|=1$.（(1.4$_a$)为酉格式）对于方程(1.9)也如此. 由引理 1.3(注意引理 1.3 中的 $a=-c>0$)故对于 $|z|>1$，$|\zeta|<1$. 因此当 $|z|>1$ 时(1.7$_a$)及(1.7$_b$)必满足. 故(1.4$_a$)，(1.5$_a'$)，(1.4$_c$)混合问题的解为稳定. 即关于右方四分之一平面问题在 $|z|>1$ 时为 G. K. S. 稳定.

(2) $|z|=1$ 的情形

对于 $z=e^{i\theta}$. 这时(1.8)根的性质由下列引理 1.5 得出.（参看[6] P. 728--730 引理 2. 1）(1.9)根的性质由下列引理 1.6 得出. 现先叙述这两个引理再讨论行列式条件(1.7$_{a,b}$).

引理 1.5　　设 $z=e^{i\theta}$，而 $x_1(\theta)$，$x_2(\theta)$ 是(1.8)的两个内根，$|x_i|\leqslant 1(i=1,2)$. 设指定次序，则可证 $|x_1|<1$，$|x_2|\leqslant 1$，且$(c<0)$

1)设 θ_1 为下列函数的最小正值：

$$\beta(\theta)=12\mathrm{Sin}\theta_1/(c\lambda_c)=-2(9+24\sqrt{6})^{1/2}=-16.46666.$$

2)设 $\theta_2=\pi-\theta_1$ 而且 $\beta(\theta_1)=\beta(\theta_2)$.

3)定义 θ_3：$\theta_2<\theta_3<\pi$ 使 $\beta(\theta_3)=-16$.

4)定义 θ_4：$\pi<\theta_4<3\pi/2$，$\beta(\theta_4)=16$，$\beta(\theta_4)=-\beta(\theta_3)$.

5)定义 θ_5：$\beta(\theta)=2(9+24\sqrt{6})^{1/2}=16.46666$ 的最小 θ 值. 而且 $\pi<\theta_5<3\pi/2$.

6)定义 θ_6 使 $\theta_5<\theta_6<2\pi$，$\beta(\theta_5)=\beta(\theta_6)$.

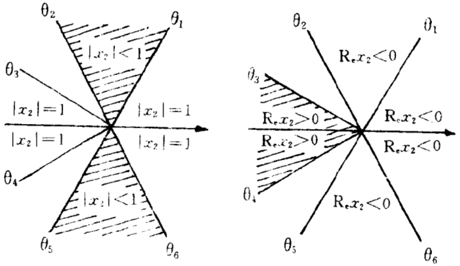


图　六

则在上述各个 θ_i 定义下，可证 $x_2(z)$ 具有下列性质：$(c<0)$

①$\theta=0$ 时 $x_2=-1$. ②$\theta<\theta<\theta_1$,时 $R_e x_2<0$, $|x_2|=1$. ③$\theta_1<\theta<\theta_2$(当 $\theta_1<\theta_2$)时 $|x_2|<1$. ④$\theta_2\leqslant\theta\leqslant\theta_3$ 时 $R_e x_2<0$, $|x_2|=1$. ⑤$\theta=\theta_3$ 时, $x_2=i$. ⑥$\theta_3<\theta<\pi$ 时 $R_e x_2>0$, $|x_2|=1$. ⑦$\theta=\pi$ 时, $x_2=1$, $z=-1$. ⑧$\pi\leqslant\theta\leqslant\theta_4$ 时 $R_e x_2>0$, $|x_2|=1$. ⑨$\theta=\theta_4$ 时, $x_2=-i$. ⑩$\theta_4<\theta\leqslant\theta_5$ 时 $R_e x_2<0$, $|x_2|=1$. ⑪$\theta_5<\theta<\theta_6$(当 $\theta_5<\theta_6$)时 $|x_2|<1$. ⑫$\theta_6\leqslant\theta<2\pi$ 时 $R_e x_2<0$, $|x_2|=1$.

若 $c>0$, $x_2(0)=1$, 上述结果用 $\theta'=\theta-\pi$ 代 θ 即可.

结果的说明:

1)由于 $\beta(\theta_1)=-2(9+24\sqrt{6})^{1/2}$, 当 $|c\lambda_c|\leqslant 6/(9+24\sqrt{6})^{1/2}$ 时 $\text{Sin}\theta_1=c\lambda_c(-2(9+24\sqrt{6})^{1/2})/12$, ∴ $|\text{Sin}\theta_1|\leqslant 1$. $(c<0)$

2)由于 $\text{Sin}\theta_3=-4c\lambda_c/3$, $\text{Sin}\theta_2=-16.46666c\lambda_c/12$, ∴ $|\text{Sin}\theta_2|>|\text{Sin}\theta_3|$.

3)$\beta(\theta_5)=16.46666$, $\text{Sin}\theta_5=16.46666c\lambda_c/12$, $(\pi/2<\theta_2<\pi)$ $\text{Sin}\theta_2=-16.46666\cdot c\lambda_c/12$. $(\pi<\theta_5<3\pi/2)$

4)当 $|c\lambda_c|=6/(9+24\sqrt{6})^{1/2}$, $|\text{Sin}\theta_1|=|\text{Sin}\theta_2|=1$, $\theta_1=\theta_2=\pi/2$, 同理 $\theta_5=\theta_6=3\pi/2$.

5)当 $\theta=0$, $z=1$, 故 $x_2=-1$, 因为这时:
$x^4-8x^3+8x-1=(x^2+1-8x)(x+1)(x-1)$ 解得 $x=\pm1$, $x=2\pm\sqrt{3}$. 又因 $\partial x/\partial z=-1/c\lambda_c$, 故 $x_1=2-\sqrt{3}$ 为内根. $x_2=-1-(1/c\lambda_c)(z-1)+\cdots(c<0)$, ∴ $x_2=-1$ 为内根, $x_3=1$ 为外根, $x_4=2+\sqrt{3}$ 为外根. 再由 θ_i 定义对于方程

$$x^4-8x^3-\beta(\theta)ix^2+8x-1=0, (\beta(\theta)=12\text{Sin}\theta/c\lambda_c)$$

由代数理论可知:

若 $\beta^2(\theta)>4(9+24\sqrt{6})$, 则 $|x_i|<1$, $(i=1,2)$

若 $\beta^2(\theta)\leqslant 4(9+24\sqrt{6})$，则 $|x_1|<1,|x_2|=1$.

因此在 $\theta_1<\theta<\theta_2,\theta_5<\theta<\theta_6$ 时有 $|x_2|<1$，这时 $\beta^2(\theta)>4(9+24\sqrt{6})$，$\beta(\theta_1)=-16.46666=\beta(\theta_2)$，$\beta(\theta_5)=16.46666=\beta(\theta_6)$.

6）关于(1.8) $x^4-8x^3-\beta(\theta)ix^2+8x-1=0$ 根的实部正负讨论. 设根的实部为正的个数为 p. 根的实部为负的个数为 q，则由代数可知：当 $\beta\neq 0,\beta\neq\pm 8,\beta\neq\pm 16$ 时

$p=\overline{V}(1,-8,64-\beta^2,8\beta^2,\beta^2(\beta^2-256))$,

$q=\overline{V}(1,8,64-\beta^2,-8\beta^2,\beta^2(\beta^2-256))$.

其中 $\overline{V}(a_1,\cdots,a_n)$ 表 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的改号数目. 由此可知：

$$0<|\beta|<8,\quad p=3,\quad q=1.$$

$$8<|\beta|<16,\quad p=3,\quad q=1.$$

$$16<|\beta|,\quad p=2,\quad q=2.$$

7）现讨论 $z=1,z=1+\delta$ 时(1.8)的根. 当 $z=1$(1.8)为 $x^4-8x^3+8x-1=0$，故有 $x_1=2-\sqrt{3}$，$x_2=1,p=3,q=1$.

8）当 $0<|\beta|<8$ 时，$p=3,q=1$，$\beta\pm 16$ 时，$x_2=\pm i$. 因 $x=i$，$1+8i-12i\mathrm{Sin}\theta/c\lambda_c+8i-1=0$. 故 $\beta(\theta_3)=-16$. 因 $x=-i$，$1-8i+12i\sin\theta/c\lambda_c-8i-1=0$ 故 $\beta(\theta_4)=16$.

此时可证

$$0<\theta<\theta_3,\quad R_e x_2<0,\quad \theta=\theta_3,\quad x_2=i,$$

$$\theta_3<\theta<\theta_4,\quad Rx_2>0,\quad \theta=\theta_4,\quad x_2=-i,$$

9）由计算得 $x_2(o)=-1$，$x_2(\theta_1)=-0.2247+i0.9744$，$x_2(\theta_2)=-0.2247+i0.9744$，$x_2(\theta_3)=i$，$x_2(\pi)=1$，$x_2(\theta_4)=-i$，$x_2(\theta_5)=-0.2247-i0.9744=x_2(\theta_6)$.

总之由上述讨论 1)—9)结果得：

当 $\theta_1<\theta<\theta_2,\theta_5<\theta<\theta_6$ 时，$|x_2|<1$，其它情形为 $|x_2|=1$.（结

果见上述图六)

当 $\theta_3<\theta<\theta_4$ 时 $R_e x_2(\theta)>0$，其它情形为 $R_e x_2<0$(结果见上述图六)

上述引理 1.5 的证明详见[6]中 P. 728—730 的引理 2.1，此地从略.

现在讨论方程式(1.5.)的特征方程式(1.9) $R(z,\zeta)=z-z^{-1}-c\lambda_f(\zeta-\zeta^{-1})=0$ 的根的性质. $(c<0)$

引理 1.6　对于(1.5.)的特征方程式 $R(z,\zeta)=0(c<0)$ 的根 ζ 具有下列性质：

(1) $|z|>1$ 时，$|\zeta_1|<1$，$|\zeta_2|>1$. $R_e\zeta$ 与 $R_e z$ 同号.

而且为酉格式. 即 $|\zeta|=1\Rightarrow|z|=1$，$(|\lambda_f c|\leqslant1)$

(2) $|z|=1$ 时，

1) $|\mathrm{Sin}\theta|>|\lambda_f c|$，$|\zeta_1|<1$，$|\zeta_2|>1$，$R_e\zeta$ 同 $R_e z$ 同号.

$|\mathrm{Sin}\theta|\leqslant|\lambda_f c|$，$|\zeta_1|=|\zeta_2|=1$.

$$\begin{cases}\theta=0(z=1)\zeta_1=1;\theta=\pi(z=-1)\zeta_1=-1.\\ \mathrm{Sin}\theta=\pm\lambda_f c,\zeta_1=\zeta_2=\pm i.\end{cases}$$

引理 1.6 的证明同引理 1.3 相同只是 $R_e\zeta$ 同 $R_e z$ 符号不同，因为当 $c<0$ 时令 $z=\rho e^{i\theta}$，$z^{-1}=e^{-i\theta}/\rho$，$\rho>1$，$\delta<1$，$\zeta=\delta e^{i\varphi}$，$\zeta^{-1}=e^{-i\varphi}\delta^{-1}$. 代入特征方程得 $\rho e^{i\theta}-e^{-i\theta}/\rho=\lambda_f c(\delta e^{i\varphi}-\delta^{-1}e^{-i\varphi})$ 得 $(\rho-1/\rho)\mathrm{Cos}\theta+i(\rho+1/\rho)\mathrm{Sin}\theta=\lambda_f c[(\delta-1/\delta)\mathrm{Cos}\varphi+i(\delta+1/\delta)\mathrm{Sin}\varphi]$.

$(c<0)$ 故得 $(\rho-1/\rho)\mathrm{Cos}\theta=\lambda_f c(\delta-1/\delta)\mathrm{Cos}\varphi$，　$(c<0)$ 故 $\mathrm{Cos}\theta$ 同 $\mathrm{Cos}\varphi$ 同号. 即 $R_e\zeta=-\mathrm{Singn}(\lambda_f c)R_e z$. 当 $z=e^{i\theta}$，得 $\zeta^2-2i(\mathrm{Sin}\theta/\lambda_f c)\zeta-1=0$. $\therefore\zeta=i\mathrm{Sin}\theta/(\lambda_f c)+\mathrm{Sign}(-c\lambda_f)(1-(\mathrm{Sin}\theta/c\lambda_f)^2)^{\frac{1}{2}}$. 由此可得引理 1.6 的结果.

行列式条件(1.7.)，(1.7.)的讨论：

由(1)已知当$|z|>1$时(1.7$_{a,b}$)为成立的.

当$|z|=1$时,即$z=e^{i\theta}$,这时$x_1\neq\zeta^{-M}$.因为$|x_1|<1$,$|\zeta|\leqslant 1$的原故.因此应用引理1.5要讨论在什么条件下$x_2\neq\zeta^{-M}$.

情形Ⅰ　$M=1$,此时$\lambda_c=\lambda_f$,当$|Sin\theta/c\lambda_f|<1$,故得$|\beta(\theta)|=|12Sin\theta/c\lambda_c|=12|Sin\theta/c\lambda_f|\leqslant 12$.由引理1.5可知$\theta_3<\theta<\theta_4$,而有$R_ex_2>0$,$R_ez<0$,但是由引理1.6有$R_ez=Sign(-c\lambda_c)R_e\zeta=R_e\zeta$.$\therefore R_ex_2=-R_e\zeta=-R_e\zeta^{-1}$,故得$x_2\neq\zeta^{-1}$.若$|Sin\theta/c\lambda_f|>1$,则$|\zeta|<1$,　$|\zeta^{-1}|>1$,而$|x_2|\leqslant 1$.故也有$x_2\neq\zeta^{-1}$.故在$M=1$时,(1.7$_a$),(1.7$_b$)均成立,故为稳定.

情形Ⅱ　M为偶数.当$\theta=\pi$,$x_2=1$,内根$\zeta=\zeta_1=-1$,$z=-1$,故$x_2=\zeta^2$,故行列式条件(1.7$_a$),(1.7$_b$)不满足.即对于任何偶数M为不稳定.

情形Ⅲ　$M\geqslant 3$的奇数.若$\theta_3<\theta<\theta_4$,这时$|x_2|=1$,

$x_2(\theta_4)=-i$,故$\arg x_2(\theta_4)=3\pi/2=4.7124$,$x_2(\theta_3)=i$,$\arg x_2(\theta_3)=\pi/2=1.5708$,$\because \beta(\theta_4)=|12\sin\theta_4/c\lambda_c|<16$,$|\sin\theta_4/c\lambda_c|\leqslant 4/3$.故得$|\sin\theta/c\lambda_f|=|\sin\theta/c\lambda_cM|\leqslant|16/12M|=4/(3M)<1$,$(\lambda_f=M\lambda_c)$.

故由$\zeta=i\sin\theta/c\lambda_f+sign(-c\lambda_f)(1-(\sin\theta/c\lambda_f)^2)^{1/2}$,故得$|\zeta|=1$,又由$-16=B(\theta_3)=(12\sin\theta_3/c\lambda_c)$,$-4/3=\sin\theta_3/c\lambda_c$,$\beta(\theta_4)=(12\sin\theta_4/c\lambda_c)=16$,$\sin\theta_4/c\lambda_c=4/3$.故得当$\theta_3\leqslant\theta\leqslant\theta_4$时

$-4/3M=\sin\theta_3/c\lambda_f<\sin\theta/c\lambda_f<\sin\theta_4/c\lambda_f=4/3M$ 即

$\arg(\zeta_{(\theta_4)}^{-M})=-M\arg(\zeta_{(\theta_4)})=M(\sin^{-1}(-4/3M))=2\pi-1.333=4.9498$,

$\arg(\zeta_{(\theta_3)}^{-M})=-M\arg(\zeta_{(\theta_3)})=-M(\sin^{-1}(-4/3M))=1.333$.

在一般情形下有

M	3	5	101	1001	∞
$\arg(\zeta_{(\theta_4)}^{M})$	4.9015	4.9335	4.9459	4.9499	4.9499
$\arg(\zeta_{(\theta_3)}^{M})$	1.3817	1.3497	1.3373	1.3333	1.3333

由此得$\arg x_2(\theta_4)<\arg(\zeta_{(\theta_4)}^{M})$，　(4.7124<4.9498)

$\arg x_2(\theta_3)>\arg(\zeta_{(\theta_3)}^{M})$，　(1.5708>1.3333)

因此在 $\theta_3<\theta<\theta_4$ 中，存在 θ_0 使

$$\arg x_2(\theta_0) = \arg(\zeta_{(\theta_0)}^{M})$$

因此由(1.7a,b)可知 $\mathrm{Det}J(z)=0$. 故为不稳定. 即组合格式 (1.4_a), $(1.5_c')$, (1.4_c), 为不稳定. 即关于右方四分之一平面问题对于 $M\geq 3$ 为不稳定.

综上所述得定理：

定理 1.1　差分逼近(1.4)－(1.6)对于 $M=1$ 为稳定，而对于 $M\geq 2$ 为不稳定.

对于上述结果，有下列看法：

若把右边值问题也推广到 $x=1-2h_c$, $x=1$. 即右边界同左边界相互对称. 当然，在两个边界上考虑有外流及内流支量的方程式，($c<0$ 为外流分量，$c>0$ 为内流分量)当方程式的系数为时间 t 的函数时，在内流或外流标量中，人工内边界 $x=1-h_c$, $x=1-2h_c$ 的值要给出. 并应用方程式：

$$r_{2M}(t) = g(t), r_M(t) = v_{N-1}(t), r_c(t) = v_{N-2}(t) \quad (1.4_e')$$

以代(1.4_c) 中相应于 r_v 的各式. 即在引理 1.4 中(1.4_a), (1.6_{abd}), (1.4_e). 把(1.4_e) 代以$(1.4_e')$ 外，其余相同，故得

(1)附属右半平面问题完全同前面一样，当只当 $M=1$ 时为稳

定.

(2)附属左半平面问题($-\infty<x\leqslant 0$)因为(1.6$_a$),(1.6$_b$)已为初边值问题稳定.(见引理1.1)故只考虑(1.4$_c$),(1.6$_a$)及边界条件(1.4$_c$)的耦合稳定问题.同理把(1.4$_c$)用反射变换变为(1.4$_c'$),其特征方程为 $z-z^{-1}=c\lambda(4(x-x^{-1})/3-(x^2-x^{-2})/6)$.其两个内根设为 x_3,x_4.因此问题变为(1.4$_c'$),(1.6$_a$),(1.4$_c'$)的纯初值耦合稳定问题.把(1.4$_c'$)的解表示为

$$v_\nu^n=z^n(\alpha_1x_3^\nu+\alpha_2x_4^\nu).\quad(|x_i|\geqslant 1,\nu\text{为负整数})$$

而(1.6$_a$)特征方程式的内根为 ζ,并把(1.6$_a$)的解表示为

$$r_\nu^n=z^n\alpha_3\zeta^\nu.\quad(|\zeta|\leqslant 1)$$

由此得 $v_{N-1}(t_n)=z^n(\alpha_1x_3^{N-1}+\alpha_2x_4^{N-1})$, $v_{N-2}(t_n)=z^n(\alpha_1x_3^{N-2}+\alpha_2x_4^{N-2})$, $r_{2M}(t_n)=z^n\alpha_3\zeta^{2M}$, $r_M(t_n)=z^n\alpha_3\zeta^M$, $r_0(t_n)=z^n\alpha_3$,把这些表达式代入(1.4$_c$)得:

$$\begin{cases}\alpha_1x_3^{N-1}+\alpha_2x_4^{N-1}-\alpha_3\zeta^M=0,\\ \alpha_1x_3^{N-2}+\alpha_2x_4^{N-2}-\alpha_3=0,\\ \alpha_3\zeta^{2M}=\bar{g}.\end{cases}$$

$$\mathrm{Det}J=\begin{vmatrix}x_3^{N-1}&x_4^{N-1}&-\zeta^M\\ x_3^{N-2}&x_4^{N-2}&-1\\ 0&0&\zeta^{2M}\end{vmatrix}=\zeta^{2M}x_3^{N-2}x_4^{N-1}(x_3-x_4)\neq 0.$$

当有重根 $x_3=x_4$ 时,则 $v_\nu^n=z^n(\alpha_1+\nu\alpha_2)x_3^\nu$, $r_\nu^n=z^n\alpha_3\zeta^\nu$ 代入(1.4$_c$)得:

$$\begin{cases}(\alpha_1+(N-2)\alpha_2)x_3^{N-2}-\alpha_3=0,\\ (\alpha_1+(N-1)\alpha_2)x_3^{N-1}-\alpha_3\zeta^M=0,\\ \alpha_3\zeta^{2M}=\bar{g}.\end{cases}$$

由此得 $\mathrm{Det}J=2x_1^{2N-3}\zeta^{2M}\neq 0$,由第二章定理2.5可知其为稳定.故

得

定理 1.2 差分逼近(1.4)—(1.6)而 r_ν 是在[1-2hc,1]中的网格函数,并把(1.4$_c$)中关于 r_ν 方程用(1.4$_c'$)代替时,对于 M=1 为稳定的,而对于所有 M≥2 为不稳定.

在定理 1.1 及定理 1.2 中,M≥2 为不稳定.因为它不满足 Godunov-Ryabenkii 条件.这时可看到 $x_2(z)$ 及 $\zeta(z)$ 是特征方程式单根.并使行列式条件不成立.因为这时有 $x_2=\zeta^{-M}$,这样的不稳定性已由 H. O. Kreiss 所讨论.这样的差分逼近,其解以指数式 N^α 增长($\alpha>0$).进一步说对于这样的常系数问题,一般不可能推广到变系数问题上去.定理 1.1 及 1.2 是很使人失望的.如果中心差分格式具有精度 $O(h_c^4+k^2)$,并同蛙跳格式相耦合,我们明显地不能对于网格加细.(因 M=1 稳定,M≥2 不稳定.)现我们要寻求当 M>1,并达到总体精度 $O(h_c^4+k^2)$ 且为稳定的格式.为此目的,现对于(1.5)及(1.6)用耗散 Lax-Wendroff 格式代替,即对于(1.5$_a$)代以

$$l_\nu(t+k)=l_\nu(t)-kcD_0(h_f)l_\nu(t)+(k^2c^2/2)D_+D_-l_\nu(t),$$
$$(\nu=1,2,\cdots,2M-1) \qquad (1.10_a)$$

其中 $D_+D_-l_\nu(t)=(l_{\nu+1}(t)-2l_\nu(t)+l_{\nu-1}(t))/h_f^2$.对于(1.5$_b$)代以

$$l_0(t+k)=l_0(t)-kcD_+l_0(t). \qquad (1.10_b)$$

其中 $D_+l_0(t)=(l_1(t)-l_0(t))/h_f$.相似地对于(1.6$_a$)代以

$$r_\nu(t+k)=r_\nu(t)-kcD_0(h_f)r_\nu(t)+k^2c^2D_+D_-r_\nu/2.$$
$$(\nu=1,\cdots,M-1) \qquad (1.11_a)$$

再对于(1.6$_b$)代以

$$r_0(t+k)=r_0(t)-kcD_+r_0(t). \qquad (1.11_b)$$

差分逼近(1.10$_a$),(1.11$_a$)具有局部误差 $O(h_f^2+k^2)$.而边界差分

逼近(1.10$_b$)(1.11$_b$)具有局部误差$O(h_f+k)$.

引理 1.7　差分逼近(1.10),(1.11)关于四分之一平面的初边值问题为 G.K.S.稳定.

证　(一)(1.10$_{ab}$)关于四分之一平面的初边值问题为 G.K.S.稳定.因(1.10$_a$)的特征方程式为

$$z = 1 - c\lambda_f(\zeta - \zeta^{-1})/2 + \lambda_f^2c^2(\zeta - 2 + \zeta^{-1})/2.$$

或$P=(z-1)\zeta+c\lambda_f(\zeta^2-1)/2-c^2\lambda_f^2(\zeta-1)^2/2=0.$ $(c<0)$.它是耗散的.内根$|\zeta|<1$,$(\zeta,z)=(1,1)$是外根.这因为$\partial\zeta/\partial z=-(\partial P/\partial z)/(\partial P/\partial\zeta)_{(1,1)}=-1/\lambda c$.故$\zeta=1-(1/\lambda c)(z-1)+\cdots$由于$c<0$故$\zeta=1$为外根.因此内根$|\zeta|<1.$ $(|z|\geqslant 1)$把(1.10$_a$)的一般解$v_\nu^N=z^N\alpha\zeta^\nu$代入(1.10$_b$)得$\mathrm{Det}J=(z-1+c\lambda_f(\zeta-1))\alpha\zeta^\nu$,故由$|z-1-c\lambda_f+c\lambda_f\zeta|\geqslant|z-1|-c\lambda_f|-|c\lambda_f\zeta|\geqslant 1-1+|c\lambda_f|-|c\lambda_f\zeta|>|c\lambda_\iota|-|c\lambda_\zeta|=0.$ $(\because |\zeta|<1)$即$\det J\neq 0$.由第二章定理 2.5 故为 G.K.S.稳定.

(二)同理对于(1.11$_{ab}$)也关于四分之一平面的初边值问题为 G.K.S.稳定.证明方法相似,兹从略.

此外,尚应用 B. Gustafsson[16]关于收敛精度阶数的结果,可知在边界上的差分逼近的精度比内点格式低一阶并不影响总体精度,只要混合方程组为稳定的即可.

对于混合方程组的稳定性,按照定理 1.1 及定理 1.2 中所用的同样方法进行,得到行列式条件(1.7$_a$),(1.7$_b$).但其中ζ是方程

$$(z - 1)\zeta + c\lambda_f(\zeta - 1)/2 - (\zeta - 1)^2c^2\lambda_f^2/2 = 0 \quad (1.12)$$

的内根.由于$c<0$,故其内根$|\zeta|<1.$ $(|z|\geqslant 1)$见第一章§3定理1,公式(3.18),而$(z,\zeta)=(1,1)$为外根.因此行列式条件(1.7$_a$)及(1.7$_b$)均满足.因为$|x_i|\leqslant 1, i=1,2, |\zeta^{-M}|>1$对于任意 M 成立.因此在所考虑的问题中,如果在边界上加细$(M>1)$稳定性条件

(1.7$_{ab}$)即可满足.故得：

定理 1.3 由(1.4),(1.10),(1.11)所给定的方法连同其相协调条件(1.4$_c$)是对于所有的 M 为稳定的.用同类的方法把 r_v 推广到[1-2hc,1]中去,并把 r_v 方程(1.4$_c$)代以(1.4$_c'$),则对于所有 M 也为稳定.

下面讨论上述结果如何推广到方程组,而结果的形式在很大范围上同内点差分逼近是无关.

现考虑严格双曲型方程组：

$$u_t = Au_x. \quad (a \leqslant x \leqslant b, \quad t \geqslant 0)$$

其中 $u \in R^s$,而 A 为 s×s 矩阵,并具有形式：

$$A = \begin{bmatrix} A^I, & 0 \\ 0, & A^{II} \end{bmatrix}. \quad (A^I < 0, \quad A^{II} > 0)$$

为了把问题简化,设 A 已经化为对角型矩阵.设初始条件为 u(x,0)=f(x),而边界条件已知具有形式：$u^I = s_a u^{II} + g_a^I(t)$,(x=a),$u^{II} = s_b u^I + g_b^{II}(t)$.(x=b)其中 s_a, s_b 为已给的矩阵.这是因为 u^I 的特征线为 x−ct=常数.(c>0)沿特征线 u^I 为常数.因此 x=a 点 u^{II} 值可以由初值给出.但 u^I 则否.故必须补充以条件：$u^I = s_a u^{II} + g_a^I(t)$,以使能在 x=a 点给出 u^I 值.同理在边界 x=b 也这样.必须由 $u^{II} = s_b u^I + g_b^{II}$ 给出在 x=b 的 u^{II} 值.$u = (u^I u^{II})'$ 的分部均依据 s_a 及 s_b 而得.而 s_a, s_b 均为常数已给矩阵.此地均假定这个微分方程双边值问题均对于初边值问题为适定.

如前,现引入网格函数 $l_v(t)$,$v_v(t)$ 及 $r_v(t)$,其中 $l_v(t)$ 为定义在左边界附近的网格函数值,$v_v(t)$ 为基本格式定义在内点的网格函数,而 $r_v(t)$ 为定义在右边界附近的网格函数.而其差分逼近各用 A_1, A_2, A_3 表示.并假定 A_1 及其边界问题,A_3 及其边界问题关于四分之一平面的差分逼近为稳定.而 A_2 为关于纯初值问题为稳定.其中 λ_c 及 λ_f 定义如前,即 $\lambda_c = k/h_c$ 为内点网格比,$\lambda_f = k/h_f$

为边界点网格比.

在此节中，也考虑联系网格函数的第二种方法. 即两端边界结构为对称的，相联接点有相同数目. 即 l_ν 同 v_ν 在左端点相耦合的数目，同右端点 r_ν 同 v_ν 相耦合的数目相同. 由于 A_1 及 A_3 关于四分之一平面的初边值已经稳定. 现只要求 A_1-A_2，及 A_2-A_3 的混合方法为稳定即可. 即双边值问题 A_1, A_2, A_3 当只当两个单边值问题（即四分之一平面问题）A_1-A_2 及 A_2-A_3 为稳定即可. 现对其各个处理，并只考虑一种情形，其它相似.

现在考虑关于 $a<x<\infty$ 的 A_1-A_2 的相对折叠耦合问题. 即把 A_1 反射到 x 轴正方向，它逼近于方程组：

$$\tilde{u}_t = \begin{pmatrix} A^{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{II} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A^{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^{II} \end{pmatrix} \tilde{u}_x,$$

$$(a \leqslant x < \infty, t \geqslant 0)$$

其中 $\tilde{u}=(\tilde{u}^{I}, \tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{III}, \tilde{u}^{N})'$ 其边界条件为

$$\tilde{u}^{I} = \tilde{u}^{III}, \quad \tilde{u}^{II} = \tilde{u}^{N} \quad (x = a)$$

现书出修正后的差分格式，并使 A_2 对应于向量 $(\tilde{u}^{I}, \tilde{u}^{I})'$，$A_1$ 对立于向量 $(\tilde{u}^{III}, \tilde{u}^{N})'$. 相对于 A_1 及 A_2 的特征方程式各设为 $K_1(\zeta, z)$，$K_2(x, z)$. 它均为关于 ζ 及 x 的多项式，其系数包含有 z 的多项式. 并设 A_1 及 A_2 各关于纯初值问题为稳定. 设 $|z|\geqslant 1$ 令：

M_{1K_1}：$K_1(\zeta, z)=0$ 中的 m_1 个 ζ_i 内根（$|\zeta_i|\leqslant 1$）的集合.

M_{1K_2}：$K_2(x, z)=0$ 中的 m_2 个 x_i 内根（$|x_i|\leqslant 1$）的集合.

M_{2K_1}：$K_1(\zeta, z)=0$ 中的外根（$|\zeta_i|\geqslant 1$）的集合.

M_{2K_2}：$K_2(x, z)=0$ 中的外根（$|x_i|\geqslant 1$）的集合.

故解 $v_\nu(t)$ 可用 m_2 个 x_i^ν 的线性组合表示，有 m_2 个参数待定. 故解

$l_v(t)$可用 m_1 个 ζ_i 的线性组合表示，有 m_1 个参数待定. 因此需要 m_1+m_2 边界条件. 并适当选取格式使耦合条件具有直接转移形式：

$$v_v(t)=l_{M_v}(t).\ (v=0,1,\cdots,(m_1+m_2-1)) \qquad (1.13)$$

这个方程式的解唯一决定了属于 L_2 的解. 其稳定性判别条件为 $\mathrm{Det}J\neq 0$. 其中 J 为关于 ζ_i，x_j 的范得蒙矩阵. 因此 $\det J=0$ 当只当 $x_i=\zeta_j^{-M}(x_i\in M_{1K_2}\zeta_j\in M_{1K_1})$这相似于定理 1.1，1.2，1.3 的更一般的情形. 根据 M. Ciment[3]的结果，可知当只当耦合格式之一为耗散时，(即 $|x|=1,x\neq 1\Rightarrow|z|<1$ 即 $|z|\geqslant 1,x\neq 1$ 时，内根 $|x|<1$ 或 $|\zeta|<1$) A_1-A_2 为稳定.

定理 1.4 由 A_1，A_2，A_3 所给出的混合方法，通过耦合条件(1.13)当 $x_i\neq\zeta_j^{-M}$ 时为稳定. 其中 ζ_i 是对于边界差分逼近 A_1 或 A_3 的特征方程式的内根. ($|\zeta|\leqslant 1$，$|z|\geqslant 1$)而 x_i 是对应于内点差分逼近 A_2 的特征方程式的内根. ($|x_i|\leqslant 1$)，$|z|\geqslant 1$). 特别若 A_2 为耗散，或 A_1 及 A_3 为耗散，根条件 $x_i\neq\zeta_j^{-M}(z\neq\pm 1)$为满足. 则混合方法为稳定.

证 为了完成证明，只注意到对于耗散格式满足 $|x|<1$，$|z|\geqslant 1$，$(z\neq\pm 1)$. 这因为耗散格式有性质 $|x|=1,x\neq 1\Rightarrow|z|<1$. 故当 $|z|\geqslant 1$ 的内根 $|x|<1$，当 $x=1$ 时，没有 $|z|=1$，$x=1$ 的内根. 这时 $x_i\neq\zeta_j^{-M}$，故 $\det J\neq 0$，由第二章定理 2.5，故为稳定，定理 1.4 证毕.

定理 1.4 说明了对于适当修正的耗散蛙跳格式作为边界条件(例如 $l_v^{n+1}=l_v^{n-1}-\lambda_f c(l_{v+1}^n-l_{v-1}^n)+\varepsilon(l_{v+1}^{n+1}-2l_v^{n+1}+l_{v-1}^{n+1})$，$(0<\varepsilon<1)$)，以及定理 1.1，1.2 中所用的精度为 $O(h_c^2+k^2)$的中心差分逼近，对于 $M\geqslant 3$ 及奇数均为稳定的方法.

这里所讨论的对于内点及边界点均应用同一时间步长 $k>0$，这个稳定性同 λ_f 有关，但 $\lambda_f=M\lambda_c$，故同 M 有关，并关于 M 为增函

数. 对于 $O(h_c^4+k^2)$, $O(h_f^2+k^2)$ 方法若使离散化误差几乎是同阶的,应选取条件 $h_c^4=k^2$ 即 $h_c^2=k$. 因此应选取 M 使 $h_f^2=h_c^4$,或 $h_c^2=h_f$. 因此空间截断误差粗略地等于内点及边界的差分逼近精度. 故得 $\lambda_f=k/h_f\doteq 1$, $h_f\doteq k$, $\lambda_c=k/h_c=\sqrt{k}$. 这表示对于边界差分逼近中空间及时间误差有同一阶数,即 $h_f\doteq k$. 而实际计算中也表示如此.

§2 双曲型方程初边值问题差分逼近的套网格有限差分方法

引言 本节讨论用套网格(Nesting grid)有限差分方法求解一阶双曲型偏数分方程式的初边值问题. 即在不同区域作不同网格的划分. 并选取不同的差分格式,这种方法广泛应用于数值天气预报及流体力学计算中. 特别对于局部区域上的解,其梯度变化激烈,在其它区域梯度变化平缓时,此法有优越性. M. Ciment[2][3] 叙述了在原点两边,用不同的网格及不同格式的耦合柯西稳定问题. 上述工作均以 H. O. Kreiss 定理[4]为基础,针对两层耗散格式的讨论因而不便于应用. 本节旨在应用 G. K. S. 理论,寻求一般形式的套网格差分格式的判别条件. §2.1 针对模型问题建立网格差分格式的一般形式,并介绍 G. K. S. 理论的另一种形式. §2.2 建立套网格差分格式稳定性判别条件. §2.3 对一类差分格式及网格型式给出易于检验的稳定性判别准则. §2.4 推广了 M. Ciment[2][3] 的耦合匹配定理并证明 §2.3 中的主要结果.

§2.1 模型问题和 G. K. S. 稳定性理论

考虑一阶双曲型偏微分方程组:

$$\partial u/\partial t = A\partial u/\partial x + Bu + F, \quad (x,t\geqslant 0) \qquad (2.1.)$$

其中 $u(x,t)$,$F(x,t)$为向量函数,A 及 B 为 $n\times n$ 常数矩阵,A 为非奇埃尔米特矩阵.不失一般性之下,假定:

$$A=\begin{bmatrix} A^{I} & 0 \\ 0 & A^{II} \end{bmatrix},\quad (A^{I}<0,A^{II}>0)$$

给定初始条件

$$u(x,0)=f(x),\quad (x\geqslant 0) \qquad (2.1_b)$$

及边界条件

$$u^{I}(0,t)=Su^{II}(0,t)+g(t).\quad (t\geqslant 0) \qquad (2.1_c)$$

称 u^{I},u^{II}为内流及外流函数.它所对应的方程称为内流及外流方程.由前面已知,用差分方法求解方程的稳定性问题,可以归结为用差分方法解外流方程的稳定性问题.不失一般性之下,本节只考虑外流方程的模型问题:

$$\partial u/\partial t=A\partial u/\partial x,\quad (-1\leqslant x<\infty,0\leqslant t<\infty,A>0) \quad (2.1_a)$$

$$u(x,0)=f(x).\quad (-1\leqslant x<\infty) \qquad (2.1_b)$$

假定问题(2.1)对 L_2 范数是适定的.现在用有限差分方法求解问题(2.1).

在区间$(-1,0)$中用差分格式:

$$R_1:\quad Q_{-1}^{(1)}v_\nu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma^{(1)}v_\nu(t-\sigma k).\ (\nu=1,2,\cdots,N-1) \quad (2.2)$$

在区间$(0,\infty)$中用差分格式:

$$R_2:\quad Q_{-1}^{(2)}w_\nu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma^{(2)}w_\nu(t-\sigma k),\ (\nu=N,N+1,\cdots) \quad (2.3)$$

其中 $Q_\sigma^{(i)}=\sum_{j=-r_i}^{p_i}A_{j\sigma}^{(i)}E_i^j$,$E_i^jU(x)=U(x+jh_i)$. p_i,r_i 都是正整数,E_i^j 为位移算子.$(i=1,2)$.令 $h_1=1/N$,$h_2=Mh_1$,$M\geqslant 1$,$\lambda_1=k/h_1$,$\lambda_2=k/h_2$. N,M 为正整数,现定义网格集合 $R(x_\nu,t_n)$:

$$
R:\begin{cases} t_n = nk, \quad (k > 0, n = 0,1,2,\cdots) \\ x_\nu = \begin{cases} -1 + \nu h_1, \\ \quad (\nu = -r_1+1, -r_1+2, \cdots, -1,0,1,\cdots, \\ \quad\quad N + P_1 - 1) \\ (\nu - N)h_2, \\ \quad (\nu = N - r_2, N - r_2 + 1, \cdots, N, N+1, \cdots, \\ \quad\quad r_2 h_2 \leqslant 1) \end{cases} \end{cases}
$$

为使差分方程式(2.2)(2.3)在 R 上有唯一解给出初始条件如下：

$$
\begin{cases} v_\nu(\sigma k) = f_\nu(\sigma k), \\ \quad (\nu = 0,1,\cdots,N-1; \sigma = 0,\cdots,s) \\ w_\nu(\sigma k) = f_\nu(\sigma k), \\ \quad (\nu = N, N+1, \cdots; \sigma = 0,\cdots,s) \end{cases} \tag{2.4}
$$

对于差分格式 R_1 尚要计算平移边界条件 R_0：

$$
R_0: \begin{cases} T_{-1} v_\mu(t+k) = \sum_{\sigma=0}^{s} T_\sigma v_\mu(t - \sigma k), \\ \quad (\mu = -r_1 + 1, \cdots, 0) \\ T_\sigma = \sum_{j=0}^{m} C_{j\sigma} E_1^j. \end{cases} \tag{2.5}
$$

以及差分格式 R_1 和 R_2 之间联接条件为：

$$
\begin{cases} v_{N-\mu M}(t+k) = w_{N-\mu}(t+k), \quad (\mu = 1,\cdots,r_2) & (2.6_a) \\ v_{N+\mu}(t+k) = \sum_{\sigma=-1}^{s} B_{1\sigma}^{(\mu)} v_{N-1}(t - \sigma k) \\ \quad + \sum_{\sigma=-1}^{s} B_{2\sigma}^{(\mu)} w_N(t - \sigma k), (\mu = 0,1,\cdots,p_1 - 1) & (2.6_b) \\ B_{1\sigma}^{(\mu)} = \sum_{j=-q_1}^{0} D_{j\sigma}^{(\mu)} E_1^j, \quad B_{2\sigma}^{(\mu)} = \sum_{j=0}^{q_2} G_{j\sigma}^{(\mu)} E_2^j. \quad (\mu = 0,1,\cdots,P_1 - 1) \end{cases}
$$

其中 m,q_1,q_2,s 是正整数. 由(2.2)－(2.6)定义的差分格式称为逼近问题(2.1)的套网格差分方法. 记为 $R_0+R_1+R_2$. 定义范数

$$\| u \|_x^2 = \sum_{\nu=-r_1+1}^{N-1} |v_\nu|^2 h_1 + \sum_{\nu=N}^{\infty} |w_\nu|^2 h_2.$$

现采用 G.K.S. 稳定定义,并假定所用差分格式 R 满足下列条件:

假定 2.1 差分格式是可解,即存在 K>0,对于任意 $G_\nu \in L_2$ 使差分格式

$$\begin{cases} Q_{-1} w_\nu = G_\nu, & (\nu = 1,2,\cdots) \\ (w_\mu - S_{-1}^\mu w_\mu) = g_\mu, & (\mu = -r+1,\cdots,0) \end{cases} \tag{2.7}$$

有唯一的解,且满足

$$\| w \|^2 \leqslant K(\| G \|^2 + h \sum_{\mu=-r+1}^{0} |g_\mu|^2). \tag{2.8}$$

假定 2.2 差分格式 R 关于柯西问题是稳定. 即下列条件为成立.

(1)差分格式 R 满足 Von-Neumann 条件,即特征方程

$$(\hat{Q}_{-1}(i\xi) - \sum_{\sigma=0}^{s} \hat{Q}_\sigma(i\xi) z^{-1-\sigma}) y = 0. \tag{2.9}$$

或者书为形式:

$$\sum_{j=-r}^{p} A_j(z) x^j y = 0. \quad (A_j(z) = A_{j-1} - \sum_{\sigma=0}^{s} A_\mu z^{-1-\sigma}, x = e^{i\xi}) \tag{2.10}$$

其中没有 |z|>1 的解. (即 |x|=1⇒|z|⩽1,此后均用 x,或 μ,表示特征方程式的内根,|x|⩽1,|μ|⩽1)

(2)(2.9)在单位圆上无重根.

假定 2.3 $A_p(z)$和 $A_{-r}(z)$非奇异. (|z|⩾1)

下列引理 2.1 见第三章§1,引理 1.6.

引理 2.1 差分格式可解的充要条件如下：

(1)方程式(2.7)对应齐次差分方程在 L_2 中仅有平凡解.

(2)特征方程式

$$Q_{-1}(x) = \sum_{j=-r}^{p} A_{j-1}x^j = 0, \qquad (2.11)$$

恰有 r_0 个根满足 $0<|x_j|<1$,其中

$$r_0 = \max\{-j : A_{j-1} \neq 0\}.$$

(3)$Q_{-1}(x)$在单位圆上没有根.即当$|x|=1$时 $Q_{-1}(x)\neq 0$.

套网格差分格式的稳定性条件主要依据 G. K. S. 稳定性理论而得到,现给现此理论的另外一种形式:即逼近(2.1)的差分格式 R 的预解方程式可书为形式:

$$(Q_{-1} - \sum_{\sigma=0}^{s} z^{-1-\sigma}Q_{\sigma})w_{\nu} = 0, \quad (\nu = 1,2,\cdots) \quad (2.12_a)$$

$$(T_{-1} - \sum_{\sigma=0}^{s} z^{-1-\sigma}T_{\sigma})w_{\mu} = 0, \quad (\mu = -r+1,\cdots,0) \quad (2.12_b)$$

其中 z 为复数.

定义 2.1

(1)给定 z,如果预解方程式(2.12)有非平凡解 $w\in L_2$,则称 z 是差分格式 R 的特征值.

(2)如果 z 不是特征值,但存在序列$\{w^j(z)\}_{j=1}^{\infty}\in L_2$,使当$\|w(z)\|=1$时

$$\lim_{j\to\infty} G(z)w^j(z) = 0.$$

则称 z 是差分格式 R 的广义特征值.其中 G(z)是(2.12)确定的 $L_2\to L_2$ 的有界差分算子.

定理 2.1 差分格式 R 稳定的充要条件为它没有$|z|\geq 1$的特征值和广义特征值.

(2.12)的特征方程为

$$P(z,x)=\sum_{j=-r}^{p}A_j(z)x^j=0. \qquad (2.13)$$

引理 2.2 当$|z|\geqslant 1$时，特征方程式(2.13)有 r 个内根$(0<|x|\leqslant 1)$p 个外根$|x(z)|\geqslant 1$.

依据定义 2.1，z 是差分格式 R 的特征值，或广义特征值的充要条件为预解方程式(2.12)具有下列形式的非平凡解：

$$w_\nu(z)=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=0}^{d_\alpha-1}\sigma_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}(\nu)x_\alpha^\nu(z), \quad (\nu=0,1,\cdots) \qquad (2.14)$$

其中 $x_\alpha(z)$是特征方程式(2.13)的相异内根，重数为 $d_\alpha=d_\alpha(z)$. $f_{\alpha\beta}$是 ν 的 β 次多项式，由引理 2.2 可知$\sum d_\alpha=r$.

注意，$w_\nu(z)$依赖于 r 个参数$\{\sigma_{\alpha\beta}\}$代入边界条件(2.12_b)得到含有 r 个未知数$\{\sigma_{\alpha\beta}\}$的齐次线性方程组，记为

$$J(z)\sigma'=0,(|z|\geqslant 1,\sigma'=\{\sigma_{\alpha\beta}\}') \qquad (2.15)$$

其中 J(z)是边界条件确定的 $r\times r$ 个方阵. σ'表示 σ 的转置.

为使 $w_\nu\in L_2$ 不为零的充要条件为线性齐次代数方程组有非零解 σ'，而 σ'具有非零解的充要条件为 $\mathrm{Det}J(z)=0$ $(|z|\geqslant 1)$

定理 2.2 (G. K. S. 稳定性行列式判别条件)

差分格式 R 稳定(即 R 不具有特征值或广义特征值)的充要条件为

$$\mathrm{Det}J(z)\neq 0. \quad (|z|\geqslant 1) \qquad (2.16)$$

§2.2 套网格差分格式稳定性判别条件

将差分格式(2.2)－(2.6)写成预解形式：

$$(Q_{-1}^{(1)}-\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma^{(1)}z^{-\sigma-1})v_\nu=0, \quad (\nu=1,2,\cdots,N-1) \qquad (2.17_a)'$$

$$(Q_{-1}^{(2)}-\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma^{(2)}z^{-\sigma-1})w_\nu=0, \quad (\nu=N,N+1,\cdots) \qquad (2.17_b)'$$

$$(T_{-1}-\sum_{\sigma=0}^{s}T_{\sigma}z^{-\sigma-1})v_{\mu}=0,\quad(\mu=-r+1,\cdots,0)\tag{2.17$_c$)$'$}$$

$$v_{N-\mu M}=w_{N-\mu},\quad(\mu=1,2,\cdots,r_2)\tag{2.17$_d$)$'$}$$

$$v_{N+\mu}=\sum_{\sigma=-1}^{s}B_{1\sigma}^{(\mu)}v_{N-1}z^{-\sigma-1}+\sum_{\sigma=-1}^{s}B_{2\sigma}^{(\mu)}w_{N}z^{-\sigma-1},\tag{2.17$_e$)$'$}$$

$$(\mu=0,1,\cdots,p_1-1)$$

再写成单步形式：

$$\hat{v}_{\nu+1}=M_1\hat{v}_{\nu},\quad(\nu=1,\cdots,N-1)\tag{2.17$_a$}$$

$$\hat{w}_{\nu+1}=M_2\hat{w}_{\nu},\quad(\nu=N,N+1,\cdots)\tag{2.17$_b$}$$

$$T\hat{v}_0=g_0\quad\text{(边界条件)}\tag{2.17$_c$}$$

$$B(\hat{v}\hat{w})'=0,\quad\text{(联接条件)}\tag{2.17$_d$}$$

$$\hat{v}_{\nu}=(v_{\nu+p_1-1},\cdots,v_{\nu-r_1})',\quad(\nu=0,\cdots,N)\tag{2.17$_e$}$$

$$\hat{w}_{\nu}=(w_{\nu+p_2-1},\cdots,w_{\nu-r_2})',\quad(\nu=N,N+1,\cdots)\tag{2.17$_f$}$$

其中

$$M_i=\begin{bmatrix}(A_{p_i}^{(i)})^{-1}(A_{p_{i-1}}) & \cdots & (A_{p_i}^{(i)})^{-1}A_{-r_i}^{(i)}\\ -I & 0 & 0\\ 0 & -I & 0\end{bmatrix},\quad i=1,2$$

(2.17$_d$)中的 B 是在变换(2.17$_e$),(2.17$_f$)下由(2.17$_d$)$'$,(2.17$_e$)$'$所决定的矩阵.

给定 $0<\varepsilon<1$,满足 $\varepsilon>4\max(h_2r_2,h_1q_1)$. 构造单调光滑函数 $\varphi\in C^{\infty}$,满足

$$\varphi(x,\varepsilon)=\begin{cases}0,(x\leqslant-\varepsilon/2)\\1,(x\geqslant-\varepsilon/4)\end{cases}$$

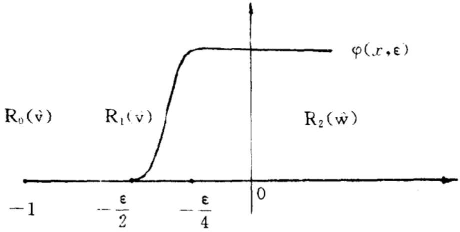


图 七

令 $\psi(x,\varepsilon)=1-\varphi(x,\varepsilon)\in C^\infty$ 用 φ 及 ψ 分别乘差分方程式 (2.17$_{a,b}$)，并把 $\psi_{\nu+1}\hat{v}_{\nu+1}$ 记为 $(\psi\hat{v})_{\nu+1}$ 再增或减一项得：

$$\begin{cases}(\psi\hat{v})_{\nu+1}=M_1(\psi\hat{v})_\nu+(\psi_{\nu-1}-\psi_\nu)\hat{v}_{\nu+1}, & (\nu=1,2,\cdots,N-1)\\ (\psi\hat{w})_{\nu-1}=M_2(\psi\hat{w})_\nu+(\psi_{\nu+1}-\psi_\nu)\hat{w}_{\nu+1}, & (\nu=N,N+1,\cdots)\\ T(\psi\hat{v})_0=\psi g_0, \quad B(\psi\hat{v},\psi\hat{w})'=0. \end{cases} \qquad (2.18)$$

因为 $\varepsilon/4>\max(h_2r_2,h_1q_1)$，故 (2.18$_b$) 全为零. 因为 w 只有 $(-r_2+1)h_2,(-r_2+2)h_2,\cdots$ 以后才有定义. 此时 ψ 正好为零，即 (2.18) 第二式恒等消灭.

(2.18$_c$) 变为 (2.18$_a$) 的初值，(2.18$_d$) 变为（参看 (2.17$_{d,e}$)'）

$$\begin{cases}\psi v_{N-\mu M}=\psi w_{N-\mu}, & (\mu=1,\cdots,r_2)\\ \psi v_{N+\mu}=\sum\limits_{\sigma=-1}^{s}\sum\limits_{j=-q_1}^{0}D_{j\sigma}^{\mu}\psi v_{N-1+j}z^{-\sigma-1} \\ \quad+\sum\limits_{\sigma=-1}^{s}\sum\limits_{j=0}^{q_2}G_{j\sigma}^{(\mu)}\psi w_{j+N}z^{-\sigma-1}. & (\mu=0,1,\cdots,p_1-1)\end{cases}$$

故 $v_{N-1-q_1}, v_{N-r_2M}, w_{N-r_2}$ 的值是在 $x_{N-1-q_1}, x_{N-r_2M}, x_{N-r_2}$ 点处的值. 由于 $\varepsilon>4\max\{h_2r_2,h_1q_1\}$ 故乘以 ψ 后 $\psi v_{N-1-q_1},\psi v_{N-r_2M},\psi w_{N-r_2}$ 均为零，而 $\psi w_{j+N},\psi v_{N+\mu}$ 也为零，即 (2.18$_d$) 也恒为零. 因此 (2.18) 实

际上只有下列两式：

$$\begin{cases}(\psi\hat{v})_{\nu+1}=M_1(\psi\hat{v})_\nu+(\psi_{\nu+1}-\psi_\nu)\hat{v}_{\nu+1}, & (\nu=1,2,\cdots,N-1)\\ T(\psi\hat{v}_0)=\psi g_0\end{cases}$$

若把 $\nu=1,2,\cdots$扩张，因此(2.18)即是关于$(\psi\hat{v})$的初边值问题 R_0+R_1.

同理用 φ 乘差分方程式(2.17)得：

$$\begin{cases}(\varphi\hat{v})_{\nu+1}=M_1(\varphi\hat{v})_\nu+(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu)\hat{v}_{\nu+1},\\ \qquad(\nu=1,2,\cdots,N-1)\\ (\varphi\hat{w})_{\nu+1}=M_2(\varphi\hat{w})_\nu+(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu)\hat{w}_{\nu+1},\\ \qquad(\nu=N,N+1,\cdots)\\ T(\varphi\hat{v})_0=\varphi(\hat{g})_0,\quad B(\varphi\hat{v},\varphi\hat{w})=0.\end{cases}\tag{2.19}$$

由(2.19$_c$)可知 $\varphi\hat{v}_0=0,\varphi\hat{g}_0=0$，即(2.19$_c$)恒等消灭. 因此(2.19)可看为 R_1,R_2 两个差分格式并以 $B(\varphi\hat{v},\varphi\hat{w})'=0$ 为联接条件的柯西耦合稳定问题 R_1+R_2. 因此(2.17)的稳定性问题可以分解为如下的两个问题：

(A)差分格式 R_0+R_1 求解的初边值问题的稳定性.

(B)差分格式 R_1+R_2 求解柯西耦合问题的稳定性.

下面定理说明了(A),(B)两问题与套网格差分格式(2.17)稳定性的关系.

定理 2.3 若(2.18)定义的初边值问题(A)和(2.19)定义的初值问题(B)均为稳定. 则套网格差分格式(2.17)也为稳定.

证 因为 $|\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu|\leqslant|\varphi'(\xi_\nu)|h\leqslant 2h/\varepsilon=2k/(\varepsilon\lambda)=O(k)$, $|\psi_{\nu+1}-\psi_\nu|\leqslant|\psi'(\eta_\nu)|h\leqslant 2h/\varepsilon\leqslant 2k/(\varepsilon\lambda)=O(k)$. 其中 $x_\nu\leqslant\xi_\nu,\eta_\nu\leqslant x_{\nu+1},\lambda=\min(\lambda_1,\lambda_2)$. 在(2.18),(2.19)中略去各项$(\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu)$,$(\psi_{\nu+1}-\psi_\nu)$后，稳定性不变. 注意到 φ,ψ 的性质及 $\varepsilon\geqslant 4\max(r_2h_2,q_1h_1)$ 故(2.18)变为

$$\begin{cases}(\psi\hat{v})_{\nu+1} = M_1(\psi\hat{v})_\nu, & T(\psi\hat{v})_0 = (\psi g)_0, \\ (\psi\hat{w})_{\nu+1} = M_2(\psi\hat{w})_\nu, & B(\psi\hat{v},\psi\hat{w})_N = 0.\end{cases} \tag{2.20}$$

同理(2.19)变为

$$\begin{cases}(\varphi\hat{v})_{\nu+1} = M_1(\varphi\hat{v})_\nu, & T(\varphi\hat{v})_0 = (\varphi g)_0 = 0, \\ (\varphi\hat{w})_{\nu+1} = M_2(\varphi\hat{w})_\nu, & B(\varphi\hat{v},\varphi\hat{w})_N^T = 0.\end{cases} \tag{2.21}$$

根据关于小扰动不影响稳定性的性质,故差分格式(2.18),(2.19)的稳定性与差分格式(2.20),(2.21)的稳定性等价. 由假定初边值问题 A 及初值问题 B 均为稳定. 为了证明本定理,先考虑 B(v,w)=0 的形式:

$$\begin{cases}v_{N-\mu M} = w_{N-\mu}, \quad (\mu = 1,2,\cdots,r_2) \\ v_{N+\mu} = \sum\limits_{\sigma=-1}^{s} \sum\limits_{j=-q_1}^{0} D_{j\mu}^{\sigma} v_{N-1+j} z^{-\sigma-1} \\ \qquad + \sum\limits_{\sigma=-1}^{s} \sum\limits_{j=0}^{q_2} G_{j\mu}^{\sigma} w_{j+N} z^{-\sigma-1}, \quad (\mu = 0,1,\cdots,p_1-1)\end{cases}$$

令 $\hat{w}_\nu = (w_{\nu+p_2-1},\cdots,w_{\nu-r_2})'$,因此上式可视为 $\hat{w}_N = (w_{N+p_2-1},\cdots,w_{N-r_2})'$的某些线性关系式. 设已化为如下的线性关系:$Sw_N = (g)_N$,因此(2.20)可书为形式:

$$R_0 + R_1: \begin{cases}(\psi\hat{v})_{\nu+1} = M_1(\psi\hat{v})_\nu, \\ T(\psi\hat{v})_0 = (\psi g)_0,\end{cases}$$

因为 $\psi\hat{w}\equiv0$,故(2.20_{cd})成为恒等式. 又可书为形式:

$$(\psi\hat{w})_{\nu+1} = M_2(\psi\hat{w})_\nu = 0, \quad S(\psi\hat{w})_N = (\psi g)_N = 0. \tag{C}$$

由于假定 R_0+R_1 为初边值问题 G. K. S. 稳定故由 G. K. S. 稳定定义得:(参看第二章 § 2 定理 2.2,公式(2.15),($\alpha_0=0$))

$$\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)^2 \|\psi\hat{v}\|_x^2 + k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right) \|\psi\hat{v}\|_0^2$$

$$\leqslant K\left[k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)(\psi g)_0^2\right]. \tag{C_1}$$

由于 $\psi\hat{w}\equiv 0$，即(c)式为恒等成立．故不防设下列关系式也成立．

$$\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)^2\|\psi\hat{w}\|_x^2+k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)\|\psi\hat{w}\|_N^2$$

$$\leqslant K\left[k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)(\psi g)_N^2\right]. \qquad (C_2)$$

由于 φ 的性质，(2.21_b) 恒为零，因此(2.21)可书为下列形式

$$(\varphi\hat{v})_{\nu+1}=M_1(\varphi\hat{v})_\nu. \qquad (D)$$

$$(\varphi\hat{w})_{\nu+1}=M_2(\varphi\hat{w})_\nu,\quad S(\varphi\hat{w})_N=(\varphi\hat{v})_N. \qquad (E)$$

但是，这里假定 R_1+R_2 是耦合柯西稳定，现重新排列并扩充为 $(\varphi\hat{v})_\nu$，$(\varphi\hat{w})_\nu$ 变量的方程组：

$$\begin{pmatrix}(\varphi\hat{v})_{\nu+1}\\(\varphi\hat{w})_{\nu+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_1 & 0\\0 & M_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\varphi\hat{v})_\nu\\(\varphi\hat{w})_\nu\end{pmatrix}$$

的初边值问题的稳定性．这时我们已改变了变量次序变为初边值问题的 G. K. S. 稳定性．故由定义得：

$$\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)^2(\|\varphi\hat{v}\|_x^2+\|\varphi\hat{w}\|_x^2)+\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)((\varphi\hat{v})_N^2+(\varphi\hat{w})_N^2)$$

$$\leqslant K\left[k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)(\varphi g)_N^2)\right].$$

但由 $(\varphi\hat{v})_{\nu+1}=M_1(\varphi\hat{v})_\nu$，$T(\varphi v)_0=(\varphi g)_0=0$，可知 $\varphi\hat{v}\equiv 0$，代入上式得：

$$\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)^2\|\varphi\hat{w}\|_x^2+\frac{|z|-1}{|z|}(\varphi\hat{w})_N^2$$

$$\leqslant K\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)(\varphi g)_N^2. \qquad (E_1)$$

再因为 $\varphi\hat{v}\equiv 0$ 故又得关系式

$$\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)^2\|\varphi\hat{v}\|_x^2+k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)(\varphi\hat{v})_0^2$$

$$\leqslant K\left[k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)(\varphi g)_0^2\right]. \qquad (E_2)$$

故由(C_1),(E_2)两式相加得

$$\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)^2\left[\|\varphi\hat{v}\|_x^2+\|\psi\hat{v}\|_x^2\right]+k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)\left((\varphi\hat{v})_0^2+(\psi\hat{v})_0^2\right)$$

$$\leqslant K\left[k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)\left((\varphi g)_0^2+(\psi g)_0^2\right)\right].$$

这表示$\begin{pmatrix}\psi\hat{v}\\ \varphi\hat{v}\end{pmatrix}_{\nu+1}=\begin{bmatrix}M_1,0\\ 0\ \ ,M_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\psi\hat{v}\\ \varphi\hat{v}\end{pmatrix}_\nu$为G. K. S. 稳定. 再由$(C_2)$,$(E_1)$相加得:

$$\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)^2\left(\|\varphi\hat{w}\|_x^2+\|\psi\hat{w}\|_x^2\right)+k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)\left((\varphi\hat{w})_N^2+\right.$$

$$\left.(\psi\hat{w})_N^2\right)\leqslant K\left[k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)\left((\varphi g)_N^2+(\psi g)_N^2\right)\right].$$

这表示$\begin{pmatrix}\psi\hat{w}\\ \varphi\hat{w}\end{pmatrix}_{\nu+1}=\begin{bmatrix}M_2,0\\ 0\ \ ,M_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\psi\hat{w}\\ \varphi\hat{w}\end{pmatrix}_\nu$为G. K. S. 稳定. 但$\hat{w}=\varphi\hat{w}+\psi\hat{w}$,$\hat{v}=\varphi\hat{v}+\psi\hat{v}$. 由此得$\hat{w}$、$\hat{v}$是收敛的. 再利用等价性原理,可知$\hat{w}$,$\hat{v}$是关于套网格差分格式(2.17)也为稳定. 定理2.3证毕.

已知问题(A)稳定的条件为$\mathrm{Det}J_A(z)\neq0(|z|\geqslant1)$. 现讨论问题(B)的稳定的条件. 现平移坐标使$x=0$为$R_1$及$R_2$的联接点:

$$R:(x_\nu,t_n)\begin{cases}t_n=nk, & (k>0,n=0,1,2,\cdots)\\ x_\nu=\nu h_1, & (\nu=-1,-2,-3,\cdots)\\ x_\nu=\nu h_2, & (\nu=0,1,2,\cdots)\end{cases}$$

具有联接条件:

$$v_{-M\mu}(t+k)=w_{-\mu}(t+k),\quad(\mu=1,2,\cdots,r_2)\quad(2.22)$$

$$v_\mu(t+k)=\sum_{\sigma=-1}^{s}B_{1\sigma}^{(\mu)}v_{-1}(t-\sigma k)+\sum_{\sigma=-1}^{s}B_{2\sigma}^{(\mu)}w_0(t-\sigma k).$$

$$(\mu=0,1,\cdots,p_1-1)\quad(2.23)$$

其中$B_{1\sigma}^{(\mu)}$,$B_{2\sigma}^{(\mu)}$见公式(2.6_b). 作拆叠变换

$$\overline{w}_\nu(t)=v_{-(\nu+1)}(t).\quad(\nu=0,1,2,\cdots)\quad(2.24_a)$$

代入(2.2)的R_1得

$$\overline{Q}^{(1)}_{-1}\overline{w}_\nu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}\overline{Q}^{(1)}_\sigma\overline{w}_\nu(t-\sigma k),$$

$$\overline{Q}^{(1)}_\sigma=\sum_{j=-p_1}^{r_1}\overline{A}^{(1)}_{j\sigma}E^j_1,\quad \overline{A}^{(1)}_{j\sigma}=A^{(1)}_{-j\sigma}.$$

这因为由

$$\sum_{j=-r_1}^{p_1}A^{(1)}_{j-1}v_{\nu+j}(t+k)=\sum_{j=r_1}^{-p_1}A^{(1)}_{-j-1}v_{\nu-j}(t+k)$$

$$=\sum_{j=r_1}^{-p_1}A^{(1)}_{-j-1}v_{-(-\nu+j-1+1)}(t+k)=\sum_{j=r_1}^{-p_1}\overline{A}^{(1)}_{j-1}w_{-\nu+j-1}(t+k)$$

$$(\nu=-1,-2,\cdots)$$

$$=\sum_{j=r_1}^{-p_1}\overline{A}^{(1)}_{j-1}\overline{w}_{\sigma+j}(t+k)=\overline{Q}^{(1)}_{-1}\overline{w}_\sigma(t+k).$$

$$(\sigma=0,1,2,\cdots)$$

同理可证另一边也成立. 再令:

$$U_\nu(t)=\begin{Bmatrix}w_\nu(t)\\ \overline{w}_\nu(t)\end{Bmatrix}.\quad(\nu=0,1,\cdots)\tag{2.24$_b$}$$

则有

$$\begin{pmatrix}Q^{(2)}_{-1} & 0\\ 0 & \overline{Q}^{(2)}_{-1}\end{pmatrix}U_\nu(t+k)=\begin{bmatrix}\sum_{\nu=0}^{s}Q^{(2)}_\sigma & 0\\ 0 & \sum_{\nu=0}^{s}\overline{Q}^{(1)}_\sigma\end{bmatrix}U_\nu(t-\sigma k).\tag{2.25}$$

联接条件(2.22)(2.23)可转化为边界条件:

$$\begin{cases}\overline{w}_{\mu M-1}(t+k)=w_{-\mu}(t+k),\quad(\mu=1,2,\cdots,r_2)\\ \overline{w}_{-(\mu+1)}(t+k)=\sum_{\sigma=-1}^{s}\overline{B}^{(\mu)}_{1\sigma}\overline{w}_0(t-\sigma k)+\sum_{\sigma=-1}^{s}B^{(\mu)}_{2\sigma}w_0(t-\sigma k).\end{cases}$$

$$(\mu=0,1,\cdots,p_1-1)\tag{2.26}$$

这只要把(2.24$_a$)代入(2.23)即得. 此时差分格式(2.25),

(2.26)相容于微分问题

$$\mathrm{U}_t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a/M \end{pmatrix} \mathrm{U}_x, \quad \bar{w}(0,t) = w(0,t). \tag{2.27}$$

因此在(2.24)的变换下，初值问题(B)等价于初边值问题(2.25)，(2.26). 但(2.25)的预解方程式为：(即用 $\mathrm{U}_\nu(t_n) = z^n u_\nu$ 代入(2.25)所得结果)

$$\left[\begin{pmatrix} Q_{-1}^{(2)} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{-1}^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{\sigma=0}^{s} Q_\sigma^{(2)} z^{-1-\sigma} & 0 \\ 0 & \sum_{\sigma=0}^{s} \bar{Q}_\sigma^{(1)} z^{-1-\sigma} \end{pmatrix}\right] u_\nu = 0.$$

$$(\nu=0,1,2,\cdots) \tag{2.28}$$

故(2.25)的通解为

$$\mathrm{U}_\nu = \begin{pmatrix} w_\nu \\ \bar{w}_\nu \end{pmatrix} = \begin{cases} \sum_{|x_j|<1} f_i(\nu,z) x_j^\nu(z), \\ \sum_{|\mu_j|<1} h_j(\nu,z) \mu_j^\nu(z). \end{cases} (\nu=0,1,2,\cdots) \tag{2.29}$$

$$\| w \|^2 = h_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |w_\nu|^2 < \infty,$$

$$\| \bar{w} \|^2 = h_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} |\bar{w}_\nu|^2 < \infty,$$

其中 $x_j(z)$ 及 $\mu_j(z)$ 分别为特征方程式

$$\mathrm{Det} | \sum_{j=-r_2}^{p_2} | A_j^{(2)}(z) x^j | = 0, \tag{2.30}$$

$$\mathrm{Det} | \sum_{j=-p_1}^{r_1} | \bar{A}_j^{(1)}(z) \mu^j | = 0, \tag{3.31}$$

的内根. $f_j(\nu,z)$ 是 ν 的多项式，其次数比 $x_j(z)$ 的重数少 1. $h_i(\nu,z)$ 是 ν 的多项式，其次数比 $\mu_i(z)$ 的重数少 1. 由引理 2.2 知特征方程式(2.30)，(2.31)，分别有 r_2 个内根($|x_j| \leqslant 1$)及 p_1 个内根($|\mu_j| \leqslant$

1). 因此 U_ν 中有 p_1+r_2 个参数，记为 $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_{p_1+r_2})'$. 代入边界条件(2.26)后得到有 p_1+r_2 个未知数的线性代数方程组

$$J_B(z)\sigma' = 0. \quad (J_B: r_2+p_1 \text{ 阶矩阵})$$

由定理 2.2，可知差分格式(2.25)，(2.26)稳定的充要条件为

$$\mathrm{Det}J_B(z) \neq 0. \quad (|z| \geqslant 1) \tag{2.32}$$

因为(2.25)，(2.26)同问题(B)等价，故若(2.32)满足，则初值问题(B)也是稳定. 故得

定理 2.4 (行列式判别条件)套网格差分格式(2.5)，(2.2)，(2.3) $R_0+R_1+R_2$ 稳定的行列式条件为

$$\mathrm{Det}J_A(z) \neq 0, \quad \mathrm{Det}J_B(z) \neq 0. \quad (|z| \geqslant 1). \tag{2.33}$$

§2.3 一类套网格差分格式的稳定性条件

§2.2 中建立的套网格差分格式稳定性判别条件，在使用时，比较难于验证. 有时甚至不可能. 然而对于一类比较特殊的差分格式和网格条件，可得到简单的稳定性判别法则.

定义 2.2 边界条件 R_0 称为平移的，若可书为：

$$\begin{cases} T_{-1}v_\nu(t+k) = \sum\limits_{\sigma=0}^{s} T_\sigma v_\nu(t-\sigma k), \\ T_\sigma = \sum\limits_{j=0}^{m} C_{j\sigma} E_1^j. \ (\nu=0,-1,\cdots,-r_1+1, m \text{ 为正整数}) \end{cases} \tag{2.34}$$

即系数 $C_{j\sigma}$ 不依赖于 μ，称为平移的. 特别当 $r_1=1$，边界格式为自然平移条件.

定义 2.3 称

$$R_0(z,x) = \sum_{j=0}^{m} C_j(z)x^j \tag{2.35}$$

为边界特征函数，其中 $C_j(z)=C_{j-1}-\sum\limits_{\sigma=0}^{s} C_{j\sigma}z^{-\sigma-1}$.

定义 2.4

①边界格式 R_0 称为满足 V-N 条件，如果

$$R_0(z,x)=0 \text{ 的根满足}$$

$$|x|=1 \Rightarrow |z| \leqslant 1. \tag{2.36₁}$$

②边界格式 R_0 称为满足耗散条件如果

$$R_0(z,x)=0 \text{ 的根满足}$$

$$|x|=1, x\neq 1 \Rightarrow |z|<1. \tag{2.36₂}$$

1　M=1 情形

若 $M=1$，$(h_2=Mh_1)$ 则 $h_1=h_2$，此时套网格差分格式称为匹配格式.(又称为耦合格式)(Matching Scheme)而且联接条件是直接转移形式：

$$\begin{cases} v_{-\mu}(t)=w_{-\mu}(t), & (\mu=1,\cdots,r_2) \\ v_\mu(t)=w_\mu(t). & (\mu=0,1,\cdots,p_1-1) \end{cases}$$

在变换 $\overline{w}_\mu(t)=v_{-(\mu+1)}$ 之下，上述化为

$$\begin{cases} \overline{w}_{\mu-1}(t)=w_{-\mu}(t), & (\mu=1,\cdots,r_2) \\ \overline{w}_{-(\mu+1)}(t)=w_\mu(t). & (\mu=0,1,\cdots,p_1-1) \end{cases} \qquad E_1$$

定理 2.5　设 R_1，R_2 分别对 Canchy 问题相容稳定，且为耗散格式.至少有一个不超过三层，如果边界条件满足

$$R_0(z,x)\neq 0, \quad (|z|\geqslant 1, 0<|x|<1) \tag{2.37}$$

$$R_0(z,1)\neq 0. \quad (|z|=1, z\neq 1) \tag{2.38}$$

则套网格差分格式(2.5)，(2.2)，(2.3)$R_0+R_1+R_2$ 为耦合稳定.

定理 2.6　设 R_1 和 R_2 分别对 Canchy 问题相容稳定，且为耗散格式，至少有一不超过三层.若边界条件满足(2.38)及 V-N 条件且为可解，则套网格差分格式(2.5)，(2.2)，(2.3)$R_0+R_1+R_2$ 为耦合稳定.

定理 2.7　设 R_1 和 R_2 分别为 Canchy 问题相容稳定，并且至少有一个为耗散格式至少有一个不超过三层.如果边界格式 R_0

满足条件(2.38)，且可解耗散，则套网格差分格式(2.5)，(2.2)，(2.3)$R_0+R_1+R_2$为耦合稳定.

以上定理要求差分格式R_1及R_2至少有一个为耗散，一般情况下则没有上述简单.

定义 2.4

$$\bar{F}_1(z)=\{\mu(z)\mid\sum_{j=p_1}^{r_1}\bar{A}_j^{(1)}(z)\mu^j=0\text{ 的所有内根}\},$$

$$F_2(z)=\{x(z)\mid\sum_{j=-r_2}^{p_2}A_j^{(2)}(z)x^j=0\text{ 的所有内根}\},$$

$$\bar{F}_1^{-M}=\{\mu(z)^{-M}\},\quad F_2^{-M}:\{x^{-M}(z)\}.$$

定理 2.8　设R_1,R_2为任意格式，分别为Canchy问题相容稳定，若

①R_1及R_2满足$\bar{F}_1^{-1}(z)\cap F_2(z)=\varnothing$，($|z|=1$)(其意义为$\bar{F}_1^{-1}$,$F_2$没有共同的元素集合)

②R_0满足(2.38)且为可解耗散.

则套网格差分格式(2.5)，(2.2)，(2.3)$R_0+R_1+R_2$为耦合稳定.

上述各定理证明见后.

注 1　定理2.5—2.7的稳定条件同差分格式R_1与R_2基本无关.定理条件只同边界格式R_0本身有关.定理2.8增加条件$\bar{F}_1^{-1}(z)\cap F_2(z)=\varnothing$.($|z|=1$)这是同$R_1$及$R_2$有关.并反映了两个格式的特征值在单位圆上的分布情况.这比讨论条件

$\mathrm{Det}J_B(z)\neq0$,　($|z|\geqslant1$)为简单.

注 2　$M>1$的情形($Mh_1=h_2$)

对于任意差分格式$R_1(h_1)$和$R_2(h_2)$在$M>1$时，很难得到比较简单的套网格差分格式稳定性判别条件.但是若限制差分格式$R_1(h_1)$满足$p_1=1$，则可得到类似简单结果.在实际上，L-W格式，蛙跳格式等均满足$p_1=1$条件.此时联接条件(2.26)变为直接转

移形式：

$\overline{w}_{\mu M-1}(t)=w_{-\mu}(t)$.　$(\mu=0,1,\cdots,r_2)$　　　　E_2

定理 2.9　①设差分格式 $R_1(h_1)$ 满足 $p_1=1$，$R_2(h_2)$ 任意. ②R_1，R_2 分别对于 Canchy 问题相容稳定. $M>1$. $h_2=Mh_1$，而且 ③满足条件：$F_1^{-M}(z)\cap F_2(z)=\varnothing$.（$|z|=1$）④边界格式 R_0 满足(2.38)且可解耗散.

则套网格差分格式(2.5)，(2.2)，(2.3)$R_0+R_1+R_2$ 为耦合稳定.

§2.4　套网格差分格式的匹配定理

本节将建立一般形式的匹配（又称为耦合）定理并以此为工具证明§2.3中诸定理.

定理 2.10（匹配定理）　设差分格式 R_1 和 R_2 对柯西问题分别为相容稳定，若满足条件：

$$F_1^{-1}(z)\cap F_2(z)=\varnothing.\quad(|z|=1)\tag{2.39}$$

则匹配格式 R_1+R_2 对柯西问题也相容稳定.

证　重复§2.2的方法，将初值问题化为初边值问题，得到预解方程式(2.28). 其通解为

$$\overline{U}=\begin{Bmatrix}w_\nu\\ \overline{w}_\nu\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{d_1}f_i(\nu,z)x_i^\nu(z),\\ \sum_{i=1}^{d_2}h_i(\nu,z)\mu_i^\nu(z).\end{Bmatrix}\tag{2.40}$$

其中 $|x_i(z)|\leqslant1$，$|\mu_i(z)|\leqslant1$. 是特征方程式(2.30)，(2.31)的 m_i 及 l_i 重根. $f_i(\nu,z)$，$h_i(\nu,z)$ 分别是 ν 的 (m_i-1) 次和 (l_i-1) 次多项式. 由引理2.2知

$$\sum_{i=1}^{d_1}m_i=r_2,\quad\sum_{i=1}^{d_2}l_i=p_1.$$

将(2.40)代入边界条件 E_1 得

$$\sum_{i=1}^{d_1} f_i(-\nu,z)x_i^{-\nu}(z) - \sum_{i=1}^{d_2} h_i((\nu-1),z)\mu_i^{\nu-1}(z) = 0.$$

$$(\nu = 1,2,\cdots,r_2) \qquad (2.41)$$

$$\sum_{i=1}^{d_1} f_i(\nu,z)x_i^{\nu}(z) - \sum_{i=1}^{d_2} h_i(-(\nu+1),z)\mu_i^{-(\nu+1)}(z) = 0.$$

$$(\nu = 0,1,\cdots,p_1-1) \qquad (2.42)$$

重排(2.41),(2.42)得线性齐次方程组：

$$\sum_{i=1}^{d_1} f_i(\nu,z)x_i^{\nu} - \sum_{i=1}^{d_2} h_i(-(\nu+1),z)(\mu_i^{-1})^{\nu+1} = 0.$$

$$(\nu = -r_2, -r_2+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,p_1-1) \quad (2.43)$$

其特征多项式为

$$\Pi(x) = \prod_{i=1}^{d_1}(x-x_i)^{m_i}\prod_{i=1}^{d_2}(x-\mu_i^{-1})^{l_i}. \qquad (2.44)$$

且 $\Pi(x)$的次数为 r_2+p_1. 易知齐次方程式(2.43)只有平凡解的充要条件为特征多项式 $\Pi(x)$无重根. 因为$\{x_i\}_{i=1}^{d_1}$,$\{\mu_i\}_{i=1}^{d_2}$是相异特征根,故(2.43)只有平凡解的充要条件为

$$x_i(z) \neq \mu_j^{-1}(z). \quad (1 \leqslant i \leqslant d_1, 1 \leqslant j \leqslant d_2, |z| \geqslant 1) \quad (2.45)$$

注意：$|z|>1$ 时,$|x_i|<1$,$|\mu_i|<1$,故(2.45)自然成立. 再由条件(2.39)即 $x_i(z)\neq\mu_j^{-1}(z)$. $|z|=1$. $(\forall\ (i,j))$因此(2.45)成立. 故齐次方程(2.43)只有平凡解的条件,即 $\mathrm{Det}J_B\neq 0$,($|z|\geqslant 1$)其中 J_B 是由(2.43)系数确定的 r_2+p_1 阶矩阵. 由定理 2.2 知匹配格式 R_1+R_2 是柯西稳定. 证毕.

如果格式之一是耗散,则结果还可简化.

引理 2.3 当 $z=1$,特征方程式

$$R(z,x) = \sum_{j=-r}^{p} A_j(z)x^j = 0,$$

$$A_j(z) = A_{j-1} - \sum_{\sigma=0}^{s} A_{j\sigma}z^{-\sigma-1},$$

有唯一的 $x=1$ 的根. $A>0$ 是外根, $A<0$ 时,若 $R(-1,1)=0$,则 $z=-1, x=1$ 也是外根.

由引理 2.3 可知 $x(-1)=1\overline{\in}F_1(z)$. $x(1)=1\overline{\in}F_2(z)$.

引理 2.4 设差分格式 R_1 和 R_2 分别是柯西稳定,并且至少有一个为不超过三层的耗散格式. 则匹配格式 R_1+R_2 是耦合柯西稳定.

证 由定理 2.10 只证 $F_1^{-1}(z)\cap F_2(z)=\varnothing$. $(|z|=1)$即可. 由于有一个为耗散,故没有 $|x|=1, x\neq 1$ 的内根因为此时 $|z|<1$. 当 $x=1$ 时,由于格式不超过三层,故没有除$(1,1)$、$(-1,1)$外 $x=1, |z|=1$ 的根. 因若有,由于实系数,根必成对存在,因此根将超过两个. 再由引理 2.3 故得 $F_1^{-1}(z)\cap F_2(z)=\varnothing$, $(|z|=1)$证毕.

注意,当两个均为耗散型格式时,引理 2.4 恰为([3]P. 698 定理)中的匹配定理.

定理 2.5—2.7 的证明 由于 R_1 及 R_2 中至少有一为耗散,而且格式不超过三层,由引理 2.4 可知匹配格式 R_1+R_2 为柯西稳定. 因此 $\mathrm{Det}J_B(z)\neq 0$. $(|z|\geq 1)$又因为边界格式满足[8]中 E. Tadmor 的定理 3.1—3.3 的条件,故 $\mathrm{Det}J_A(z)\neq 0$. $(|z|\geq 1)$再由定理 2.4 可知套网格差分格式(2.5),(2.2),(2.3)$R_0+R_1+R_2$ 是耦合稳定.

定理 2.8 的证明 由定理 2.10 可知 $\mathrm{Det}J_B(z)\neq 0$, $(|z|\geq 1)$又 R_0 满足[8]中定理 3.4 的条件,(即第三章定理 1.5)故 $\mathrm{Det}J_A(z)\neq 0$. $(|z|\geq 1)$由定理 2.4 可知套网格差分格式(2.5),(2.2),(2.3)$R_0+R_1+R_2$ 是耦合稳定.

引理 2.5 设 $p_1=1, M>1$,若条件

$$F_1^{-M}(z)\cap F_2(z)=\varnothing \quad (|z|=1) \tag{2.46}$$

满足,则匹配格式 R_1+R_2 是柯西耦合稳定.

证 由于 $p_1=1$,由引理 2.2 知特征方程式(2.31)只有一个

内根，$|\mu(z)|\leqslant 1$，$(|z|\geqslant 1)$因此预解方程式可书为

$$\mathrm{U}_\nu=\begin{Bmatrix} w_\nu \\ \bar{w}_\nu \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{d_1} f_i(\nu,z)x_i^\nu(z), \\ \beta\mu^\nu(z). \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

其中 β 为常数，代入边界条件

$$\bar{w}_{\mu M-1}(t)=w_{-\mu}(t),\quad (\mu=0,1,\cdots,r_2) \qquad E_2$$

得

$$\beta\mu^{\nu M-1}(z)-\sum_{i=1}^{d_1} f_i(-\nu,z)x_i^{-\nu}(z)=0.$$

$$(\nu=0,1,\cdots,r_2) \quad (2.48)$$

以下讨论类似于定理 2.10，引理得证.

定理 2.9 的证明　由引理 2.5 可知 R_1+R_2 是柯西耦合稳定. 由定理 2.2 可知 $\mathrm{Det}J_B(z)\neq 0$，$(|z|\geqslant 1)$由[8]中定理 3.4(即第三章定理 1.5)可知 $\mathrm{Det}J_A(z)\neq 0$，$(|z|\geqslant 1)$再由定理 2.4 可知套网格差分格式(2.5)，(2.2)，(2.3)$R_0+R_1+R_2$ 为耦合稳定.

定理 2.11

(1)设差分格式 $R_1(h)$满足 $p_1=1$，$R_2(h)$任意，

(2)R_1，R_2 分别为柯西稳定，

(3)R_1，R_2 中之一为耗散，格式不超过三层，

(4)边界条件 R_0 可解耗散，并满足(2.38).

则套网格差分格式(2.5)，(2.2)，(2.3)$R_0+R_1+R_2$ 为耦合稳定.

证　1)由(3)及引理 2.5，引理 2.4 可知匹配格式 R_1+R_2 为柯西稳定.　2)由定理 2.2 可知，$\mathrm{Det}J_B(z)\neq 0$. $(|z|\geqslant 1)$.

3)由(4)及[8]中定理 3.4(即第三章定理 1.5)可知 R_0+R_1 为初边值问题柯西稳定. 而且 $\mathrm{Det}J_A(z)\neq 0(|z|\geqslant 1)$.　4)由定理 2.4 可知套网格差分格式(2.5)，(2.2)，(2.3)$R_0+R_1+R_2$ 为耦合稳定.

§3　双曲型方程式多重套网格有限差分方法及其稳定性判别法

§3.1 引言　本节目的是讨论双曲型多边界问题的多重套网格方法及其稳定性理论. 为简单计，把 x 轴划分为不同区域，每一区域具有不同网格，并选取不同精度差分格式，而研究其中应用什么格式及满足什么条件，才能相互协调及稳定. 这种思想最初见于单边界问题，并由 M. Ciment[2],[3] 提出，并得出了一些相互协调的条件. 以后关于混合初边值问题，由 H. O. Kreiss[4] E. Tadmor[7],[8],[9] 等提出一些判别稳定性条件. 最近李欣恺、朴致淳[11] 又把此种思想推广到套网格有限差分方法，并得到一些判别稳定性的简便方法. 本节即对于具有多个内边界的网格区域，每个区域的网格不同，并分别用精度不同的格式讨论其中应满足什么条件才使整体稳定.

模型问题　现在求下列外流双曲型偏微分程式模型问题

$$\partial u/\partial t = \partial u/\partial x, (0 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant t < \infty), u(x,0) = f(x). \quad (3.1)$$

由于特征线为 x+t=常数，故不必给出边值. 为简单计，把$[0,\infty)$分割为$[0,1]$，$[1,2]$，$[2,3]$…等区间.（例如以三个区间为例）若用下列各种不同的差分逼近式即在区间$[i-1,i]$上分别应用差分格式：

$$R_i:\begin{cases} Q_{-1}^{(i)} u_\nu^{(i)}(t+k) = \sum_{\sigma=0}^{s} Q_\sigma^{(i)} u_\nu^{(i)}(t-\sigma k), \\ Q_\sigma^{(i)} = \sum_{j=-r_i}^{p_i} A_{j\sigma}^{(i)} E_j, \\ E_j u^{(i)}(x) = u^{(i)}(x+jh). \quad (i=1,2,3,\cdots) \end{cases} \quad (3.2)$$

$(i=1,\nu=1,2,\cdots,N_1-1;i=2,\nu=N_1,N_1+1,\cdots,$
$N_1+N_2-1;i=3,\nu=N_1+N_2,N_1+N_2+1,\cdots,$
$N_1+N_2+N_3-1,\cdots)$

r_i,p_i 为正整数，在[0,1]，[1,2]，[2,3]…中的步长各用 $h_1,h_2,h_3\cdots$ 表示，$h_1=1/N_1,h_2=1/N_2,h_3=1/N_3,\cdots,N_1,N_2,N_3,\cdots$ 为已给的正整数，k 表时间步长。

$$\begin{cases}M_{12}=h_2/h_1,h_2=(N_1/N_2)h_1,\\ M_{23}=h_2/h_3,h_2=(N_3/N_2)h_3,\cdots\\ \lambda_1=k/h_1,\lambda_2=k/h_2,\lambda_3=k/h_3,\cdots.\end{cases}\tag{3.3}$$

因此，用 N 表示下列网格区分 (x_ν,t_n)：

$$N:\begin{cases}t_n=nk,\quad (k>0,n=0,1,2,\cdots)\\ x_\nu\begin{cases}=\nu h_1,\quad (\nu=-r_1+1,\cdots,N_1+p_1-1,u_\nu^{(1)}\text{ 的定义范围})\\ =1+(\nu-N_1)h_2,(\nu=N_1-r_2+1,\cdots,N_1+N_2+p_2-1,\\ \qquad u_\nu^{(2)}\text{ 的定义范围})\\ =2+(\nu-N_1-N_2)h_3,(\nu=N_1+N_2-r_3+1,\cdots,\\ \qquad N_1+N_2+N_3+p_3-1,u_\nu^{(3)}\text{ 的定义范围})\\ \cdots.\end{cases}\end{cases}\tag{3.4}$$

初始条件：

$$\begin{cases}u_\nu^{(1)}(\sigma k)=f_\nu(\sigma k),\\ \qquad (\nu=-r_1+1,\cdots,N_1-1,x_\nu=\nu h,\sigma=0,\cdots,s)\\ u_\nu^{(2)}(\sigma k)=f_\nu(\sigma k),\\ \qquad (\nu=N_1,\cdots,N_1+N_2-1,x_\nu=1+(\nu-N_1)h_2)\\ u_\nu^{(3)}(\sigma k)=f_\nu(\sigma k),\\ \qquad (\nu=N_1+N_2,\cdots,N_1+N_2+N_2-1,\\ \qquad x_\nu=2+(\nu-N_1-N_2)h_3)\\ \cdots\end{cases}\tag{3.5}$$

上述若 $i=1$ 则 R_1 及边界格式 R_0 联合称为初边值问题 IBP(Initial-boundary value Problems). 其稳定性判别法先后由 M. Ciment, H. O. Kreiss 及 E. Tadmor[2][10] 等所讨论. 若 $i=2$, 即 $R_0+R_1+R_2$ 两个区间套网格差分格式的不同网格, 不同格式的相互匹配耦合问题. 它由李欣恺, 朴致淳[11] 所解决. 本节在上述的基础上进一步推广到 $i=3, i=4, \cdots$ 的多重套网格有限差分方法的不同区间不同格式的相互匹配耦合问题. 主要归结到两种网格类型的匹配耦合. 即由密到稀. R_1(密网格格式)$\rightarrow R_2$(稀网格格式)的稳定耦合条件及由稀到密 R_2(稀网格格式)$\rightarrow R_3$(密网格格式)的稳定耦合条件. 此外设 R_1 的边界条件为

$$R_0:\begin{cases} T_{-1}^{(\mu)} u_\mu^{(1)}(t+k) = \sum_{\sigma=0}^{s} T_\sigma^{(\mu)} u_\mu^{(1)}(t-\sigma k), \\ T_\sigma^{(\mu)} = \sum_{j=0}^{m} C_{j\sigma}^{(\mu)} E^j, \\ \qquad (\mu = -r_1+1, \cdots, 0, \sigma = -1, \cdots, s) \end{cases} \tag{3.6}$$

R_1, R_2 的联接条件并用符号 $R_1 \cap R_2$ 表示它($M_{12}>1$, 由密到稀)

$$R_1 \cap R_2:\begin{cases} u_{N_1-\mu M_{12}}^{(1)}(t+k) = u_{N_1-\mu}^{(2)}(t+k), \quad (\mu = 1, 2, \cdots, r_2) \\ u_{N_1+\mu}^{(1)}(t+k) = \sum_{\sigma=-1}^{s} B_{1\sigma}^{(\mu)} u_{N_1-1}^{(1)}(t-\sigma k) \\ \qquad + \sum_{\sigma=-1}^{s} B_{2\sigma}^{(\mu)} u_{N_1}^{(2)}(t-\sigma k), \quad (\mu = 0, 1, \cdots, p_1-1) \\ B_{1\sigma}^{(\mu)} = \sum_{j=-q_1}^{0} D_{j\sigma}^{(\mu)} E_1^j, \quad B_{2\sigma}^{(\mu)} = \sum_{j=0}^{q_2} G_{j\sigma}^{(\mu)} E_2^j. \end{cases} \tag{3.7}$$

R_2, R_3 的联接条件 $R_2 \cap R_3$. ($M_{23}>1$ 由稀到密)

$$R_2 \cap R_3: \begin{cases} u^{(2)}_{N_1+N_2+\nu}(t+k) = u^{(3)}_{N_1+N_2+M_{23}\nu}(t+k), \\ \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, p_2 - 1) \\ u^{(3)}_{N_1+N_2-\nu}(t+k) = \sum_{\sigma=-1}^{s} \mathring{B}^{(\nu)}_{1\sigma} u^{(2)}_{N_1+N_2-1}(t-\sigma k) \\ \qquad + \sum_{\sigma=-1}^{s} \mathring{B}^{(\nu)}_{2\sigma} u^{(3)}_{N_1+N_2}(t-\sigma k), \quad (\nu = 1, \cdots, r_3) \\ \mathring{B}^{(\nu)}_{1\sigma} = \sum_{j=-q_1}^{0} \mathring{D}^{(\nu)}_{j\sigma} E^j_2, \mathring{B}^{(\nu)}_{2\sigma} = \sum_{j=0}^{q_2} \mathring{G}^{(\nu)}_{j\sigma} E^j_3. \end{cases}$$

(3.8)

…

微分方程(3.1)的多层套网格的差分逼近 MND.

由(3.2),(3.6),(3.7),(3.8)…等定义的差分逼近 $R_1, R_2, R_3, \cdots$ 及初始条件 R_0,联接条件 $R_1 \cap R_2, R_2 \cap R_3, \cdots$ 称为微分方程(3.1)的多层套网格有限差分逼近,并用 MND(Multiple Nesting Grid Difference Methods)表示.

纯初值问题的差分逼近 R:

$$R: \begin{cases} Q_{-1} u_\nu(t+k) = \sum_{\sigma=0}^{s} Q_\sigma u_\nu(t-\sigma k), \quad Q_\sigma = \sum_{j=-r}^{p} A_{\sigma j} E^j. \\ u(x, 0) = f(x). \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{cases}$$

(3.9)

设用分离变量法 $u_\nu(t_n) = z^n x^\nu y = z^n e^{i\nu\xi} y$ 代入上式得预解方程式

$$\hat{R}: \begin{cases} (\hat{Q}_{-1}(i\xi) - \sum_{\sigma=0}^{s} \hat{Q}_\sigma(i\xi) z^{-\sigma-1}) y = 0, \\ \hat{Q}_\sigma = \sum_{j=-r}^{p} A_{\sigma j} e^{ij\xi}. \end{cases} \tag{3.10}$$

或书为形式

$$p(x,z)=\sum_{i=-r}^{p}A_i x^i=0.\ (A_i=A_{i-1}-\sum_{\sigma=0}^{s}A_{i\sigma}z^{-\sigma-1}) \quad (3.11)$$

定义 3.1 R 称为柯西稳定的，如果 $p(x,z)=0$ 的根满足 $|x|=1 \Rightarrow |z|\leqslant 1$. 而且 $|z|=1$ 的根为单根.

初边值问题差分逼近 R_0,R_1 我们用 IBP 表示：

$$\text{IBP}\begin{cases} R_1: Q_{-1}u_\nu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma u_\nu(t-\sigma k)+kF_\nu, \quad (\nu=1,2,\cdots) \\ u_\nu(\sigma k)=f_\nu(\sigma k), \\ \qquad (\nu=-r+1,\cdots,0,1,\cdots,\sigma=0,\cdots,s) \quad (3.12) \\ R_0: T_{-1}^{(\mu)}u_\mu(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}T_\sigma^{(\mu)}u_\mu(t-\sigma k)+g_\mu(t). \\ \qquad (\mu=-r+1,\cdots,0) \quad (3.13) \end{cases}$$

IBP 为 G. K. S. 稳定的定义为：

定义 3.2 若 $f\equiv 0$，如果存在常数 K_0 及 α_0 使 $\forall\ \alpha>\alpha_0$ 满足关系：(参看第二章 § 稳定性定义 2.3、公式(2.12))

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{1+\alpha k}\right)\sum_{\mu=-r+1}^{0}\|e^{-\alpha t}u_\mu\|_t^2+\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{1+\alpha k}\right)^2\|e^{-\alpha t}u\|_{x,t}^2 \\ &\leqslant K_0\left(\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{1+\alpha k}\right)\sum_{\mu=-r+1}^{0}\|e^{-\alpha(t+k)}g_\mu\|_t^2+\|e^{-\alpha(t+k)}F\|_{x,t}^2\right).\end{aligned} \quad (3.14)$$

则称 R_0,R_1 为 G. K. S. 稳定.

若 $F=0$，当把(3.12)，(3.13)书为预解形式时，即用变换 $u_\nu^n=e^{-\alpha t}z^n u_\nu$ 代入(3.12)，(3.13)再把多层形式化为两层格式后，令 $\hat{u}_\nu=(u_{\nu+p-1},\cdots,u_{\nu-r})$得

$$\hat{u}_{\nu+1}=M_1\hat{u}_\nu, \quad T\hat{u}_1=\hat{g}_1. \quad (3.15)$$

引理 3.1 对于齐次情形下($F_\nu=0$)的初边值问题 IBP(3.12)，(3.13)，当 $f_\nu=0$ 时，若存在常数 K 对于 $|z|\geqslant 1$ 使

$$\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)^2 \|\hat{u}\|_x^2 + k\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)|\hat{u}|_1^2 \leqslant Kk\left(\frac{|z|-1}{|z|}\right)|\hat{g}|^2 \tag{3.16}$$

成立，则(3.15)为 G. K. S. 稳定.

差分格式的初边值问题 IBP(3.12)，(3.13)为 G. K. S. 稳定的代数判别条件：

设单边值问题 IBP(3.12)，(3.13)应用分离变量法 $u_\nu^n = z^n w_\nu$，在齐次时，($F_\nu = g_\nu = 0$)得其预解式为

$$\text{IBP}\begin{cases}\left(Q_{-1} - \sum_{\sigma=0}^{s} z^{-1-\sigma} Q_\sigma\right) w_\nu = 0, & (\nu = 1, 2, \cdots) \\ \left(T_{-1}^{(\mu)} - \sum_{\sigma=0}^{s} z^{-1-\sigma} T_\sigma^{(\mu)}\right) w_\mu = 0. & (\mu = -r+1, \cdots, 0)\end{cases} \tag{3.17}$$

上式又可合书为形式：

$$Gw_\nu = 0. \quad (\nu = -r+1, -r+2, \cdots) \tag{3.18}$$

定义 3.3 1)若预解式(3.17)对于给定 z 有非平凡解 $w_\nu(z) \in L_2$，则称 z 为 IBP(3.17)的特征值. 2)若 z 不是(3.17)的特征值，但存在$\{w_\nu^j(z)\}_{j=1}^\infty \in L_2$，当 $\|w^j(z)\| = 1$ 时满足

$$\lim_{j\to\infty} G(z) w_\nu^j(z) = 0. \tag{3.19}$$

则称 z 为 IBP 的广义特征值.

现令 $w_\nu^n = z^n x^\nu$，代入(3.17_1)，得(3.11). 称为(3.17_1)的特征方程式. (又称(3.17_1)的预解方程式)

下面我们简述一些已有的结果. ([8]中引理 4.1 到 4.4)

引理 3.2 差分格式 IBP 为稳定的充要条件为当 $|z| \geqslant 1$ 时不存在特征值及广义特征值.

引理 3.3 设 IBP(3.18)的特征值方程式(3.11)为耗散，又若 $|z| \geqslant 1$，则 $\mathrm{Det}P(z, x) = 0$ 的根 x 有 nr 个内根(即 $|x| \leqslant 1$)及 np

个外根.（$|x|\geqslant 1$）

若对于特征方程式（3. 11）的非平凡解 $w_\nu(z)\in L_2$ 则 $w_\nu(z)$ 可表示为如下的形式：

$$w_\nu(z)=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{d_\alpha-1}\sigma_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}(\nu)x_\alpha^\nu(z),\quad(\nu=1,2,\cdots)\qquad(3.20)$$

其中 $x_\alpha(z)$ 为（3. 11）的内根，重数为 d_α. $f_{\alpha\beta}(\nu)$ 为 ν 次多项式，而且有 $\sum_{\alpha=1}^{N}d_\alpha=nr$. 把（3. 20）代入（3. 17_2）得：

$$J(z)\sigma'=0.\quad(|z|\geqslant 1,\sigma'=[\sigma_{\alpha\beta}]')\qquad(3.21)$$

引理 3. 4 初边值问题 IBP（3. 18）差分逼近为 G. K. S. 稳定的充要条件为

$$\mathrm{Det}J(z)\neq 0.\quad(|z|\geqslant 1)\qquad(3.22)$$

§3. 2 多重套网格差分格式 MND 的 G. K. S. 稳定的判别条件的行列式形式

现用分离变量法 $u_\nu^n=z^n u_\nu$ 代入 MND 格式 $R_0+R_1+R_2+R_3+\cdots$ 及联接条件 $R_1\cap R_2,R_2\cap R_3,\cdots$ 后得到预解方程式 $\widehat{\mathrm{MND}}$：

$$\hat{R}_0\hat{R}_1:\begin{cases}(T_{-1}^{(\nu)}-\sum_{\sigma=0}^{s}T_\sigma^{(\nu)}z^{-\sigma-1})u_\nu^{(1)}=0,\quad(\nu=-r+1,\cdots,0)\\(Q_{-1}^{(1)}-\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma^{(1)}z^{-\sigma-1})u_\nu^{(1)}=0,\quad(\nu=1,\cdots,N_1-1)\end{cases}\qquad(3.23_1)$$

$$\hat{R}_2:(Q_{-1}^{(2)}-\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma^{(2)}z^{-\sigma-1})u_\nu^{(2)}=0,\quad(\nu=N_1,\cdots,N_1+N_2-1)\qquad(3.23_2)$$

$$\hat{R}_3:(Q_{-1}^{(3)}-\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma^{(3)}z^{-\sigma-1})u_\nu^{(3)}=0,\quad(\nu=N_1+N_2,\cdots,N_1+N_2+N_3-1)\qquad(3.23_3)$$

……

$\hat{R}_1 \cap \hat{R}_2$: $u^{(1)}_{N_1-\mu M_{12}} = u^{(2)}_{N_1-\mu}$, $(\mu = 1, \cdots, r_2, M_{12} > 1)$

$$u^{(1)}_{N_1+\mu} = \sum_{\sigma=-1}^{s} B^{(\mu)}_{1\sigma} u^{(1)}_{N_1-1} z^{-\sigma-1} + \sum_{\sigma=-1}^{s} B^{(\mu)}_{2\sigma} u^{(2)}_{N_1} z^{-\sigma-1}, \quad (3.23_4)$$

$(\mu = 0, \cdots, p_1 - 1)$

$\hat{R}_2 \cap \hat{R}_3$: $u^{(2)}_{N_1+N_2+\mu} = u^{(3)}_{N_1+N_2+\mu M_{23}}$, $(\mu = 1, \cdots, p_2, M_{23} > 1)$

$$u^{(3)}_{N_1+N_2-\mu} = \sum_{\sigma=-1}^{s} \tilde{B}^{(\mu)}_{1\sigma} u^{(2)}_{N_1+N_2-1} z^{-\sigma-1} + \sum_{\sigma=-1}^{s} \tilde{B}^{(\mu)}_{2\sigma} u^{(3)}_{N_1+N_2} z^{-\sigma-1},$$

$(\mu = 0, \cdots, r_3 - 1)$ (3.23₅)

……

$\hat{R}_i$ 又称为 R_i 的特征方程式. 现求 MND 格式(3.23)的单步形式. 应用变换:

$$\begin{cases} \hat{u}^{(1)}_\nu = (u^{(1)}_{\nu+p_1-1}, \cdots, u^{(1)}_{\nu-r_1})', & (\nu = 1, 2, \cdots, N_1 - 1) \\ \hat{u}^{(2)}_\nu = (u^{(2)}_{\nu+p_2-1}, \cdots, u^{(2)}_{\nu-r_2})', & (\nu = N_1, \cdots, N_1 + N_2 - 1) \\ \hat{u}^{(3)}_\nu = (u^{(3)}_{\nu+p_3-1}, \cdots, u^{(3)}_{\nu-r_3})'. & \\ \quad (\nu = N_1 + N_2, \cdots, N_1 + N_2 + N_3 - 1) & \\ \cdots & \end{cases} \tag{3.24}$$

把(3.23)书为形式:

$$\begin{cases} \hat{R}_i: \quad \hat{u}^{(i)}_{\nu+1} = M_i \hat{u}^{(i)}_\nu, (i = 1, \nu = 1, \cdots, N_1 - 1; \\ \qquad\qquad i = 2, \nu = N_1, \cdots, N_1 + N_2 - 1, \cdots) \\ \hat{R}_0: \quad T\hat{u}^{(1)}_1 = g_1, \\ \hat{R}_1 \cap \hat{R}_2: \quad B_{12}(\hat{u}^{(1)}, \hat{u}^{(2)})_{N_1} = 0, \\ \hat{R}_2 \cap \hat{R}_3: \quad B_{23}(\hat{u}^{(2)}, \hat{u}^{(3)})_{N_1-N_2} = 0 \cdots, \end{cases} \tag{3.25}$$

其中

$$
M_i = \begin{pmatrix} (A_{p_i}^{(i)})^{-1}A_{p_i-1}^{(i)} & \cdots & (A_{p_i}^{(i)})^{-1}A_{-r_i}^{(i)} \\ I & \cdots 0 & 0 \\ \cdots & & \\ 0 & \cdots I & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.26}
$$

现叙述 R_i, R_{i+1} 及 $R_i \cap R_{i+1}$ 为耦合稳定$(i=1,2,3,\cdots)$的判别条件. 由(3.23)先把 $\nu=N_1+\cdots+N_i$ 作为原点. 在 $x=0$ 的左右侧,分别用差分格式 R_i 及 R_{i+1} 计算. 联接关系为 $R_i \cap R_{i+1}$,不失一般性,设 $M>1$. ($M<1$ 也类似)设网格点(x_ν, t_n)集合为:

$$
\tilde{R}(x_\nu, t_n) \begin{cases} t_n = nk, k>0, & (n=0,1,\cdots) \\ x_\nu = \begin{cases} \nu h_i, & (\nu=-1,-2,-3,\cdots) \\ \nu h_{i+1}. & (\nu=0,1,2,\cdots; h_{i+1}=Mh_i, M>1) \end{cases} \end{cases} \tag{3.27}
$$

此时 $R_i+R_{i+1}, R_i \cap R_{i+1}$ 可书为形式:

$$
\begin{cases} Q_{-1}^{(i)} u_\nu^{(i)}(t+k) = \sum_{\sigma=0}^{s} Q_\sigma^{(i)} u_\nu^{(i)}(t-\sigma k), & (\nu=-1,-2,\cdots) \\ Q_{-1}^{(i+1)} u_\nu^{(i+1)}(t+k) = \sum_{\sigma=0}^{s} Q_\sigma^{(i+1)} u_\nu^{(i+1)}(t-\sigma k), & (\nu=0,1,2,\cdots) \\ u_{-M\mu}^{(i)}(t+k) = u_{-\mu}^{(i+1)}(t+k), & (\mu=1,2,\cdots,r_{i+1}) \\ u_\mu^{(i)}(t+k) = \sum_{\sigma=-1}^{s} \sum_{j=0}^{-q_2} D_{j\mu}^{(\mu)} u_{-1+j}^{(i)}(t-\sigma k) & \\ \qquad + \sum_{\sigma=-1}^{s} \sum_{j=0}^{q_1} G_{j\mu}^{(\mu)} u_j^{(i+1)}(t-\sigma k), & (\mu=0,1,\cdots,p_i-1) \end{cases} \tag{3.28}
$$

$$
\text{其中 } Q_\sigma^{(i)} = \sum_{j=-r_i}^{p_i} A_{j\sigma}^{(i)} E^j. \quad (\sigma=-1,0,\cdots,s) \tag{3.29}
$$

令

$$\overline{u}_{\nu}^{(i)}(t)=u_{-(\nu+1)}^{(i)}(t).\quad(\nu=0,1,2,\cdots)\tag{3.30}$$

代入(3.28)第一式得：

$$\begin{cases}\sum_{j=-r_i}^{p_i}A_{j-1}^{(i)}u_{-\nu+j}^{(i)}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{j=-r_i}^{p_i}A_{j\sigma}^{(i)}u_{-\nu+j}^{(i)}(t-\sigma k),\\ \qquad(\nu=1,2,\cdots)\\ \sum_{j=r_i}^{-p_i}A_{-j-1}^{(i)}u_{-(\nu+1)-j}^{(i)}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{j=r_i}^{-p_i}A_{-j\sigma}^{(i)}u_{-(\nu+1)-j}^{(i)}(t-\sigma k),\\ \qquad(\nu=0,1,\cdots)\end{cases}\tag{3.31}$$

由(30)得

$$\sum_{j=r_i}^{-p_i}A_{-j-1}^{(i)}\overline{u}_{\nu+j}^{(i)}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{j=r_i}^{-p_i}A_{-j\sigma}^{(i)}\overline{u}_{\nu+j}^{(i)}(t-\sigma k).$$

$$(\nu=0,1,\cdots)\tag{3.31}$$

再令

$$A_{-j\sigma}^{(i)}=\overline{A}_{j\sigma}^{(i)},\tag{3.32}$$

代入上式得

$$\sum_{j=-p_i}^{r_i}\overline{A}_{j-1}^{(i)}\overline{u}_{\nu+j}^{(i)}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}\sum_{j=-p_i}^{r_i}\overline{A}_{j\sigma}^{(i)}\overline{u}_{\nu+j}^{(i)}(t-\sigma k).$$

$$(\nu=0,1,2,\cdots)\tag{3.33}$$

即

$$\begin{cases}\overline{Q}_{-1}^{(i)}\overline{u}_{\nu}^{(i)}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}\overline{Q}_{\sigma}^{(i)}\overline{u}_{\nu}^{(i)}(t-\sigma k),\quad(\nu=0,1,2,\cdots)\\ \overline{Q}_{\sigma}^{(i)}=\sum_{j=-p_i}^{r_i}\overline{A}_{j\sigma}^{(i)}E^{j}.\quad(\sigma=-1,0,\cdots,s)\end{cases}\tag{3.34}$$

再令

$$u_\nu^{(i,i+1)}(t) = (\bar{u}_\nu^{(i)}(t),\quad u_\nu^{(i+1)}(t))'. \tag{3.35}$$

可知(3.23$_{1,2}$)可书为形式

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{-1}^{(i)} & 0 \\ 0 & Q_{-1}^{(i+1)} \end{bmatrix} u_\nu^{(i,i+1)}(t+k)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{\sigma=0}^{s} \bar{Q}_\sigma^{(i)} & 0 \\ 0 & \sum_{\sigma=0}^{s} Q_\sigma^{(i+1)} \end{bmatrix} u_\nu^{(i,i+1)}(t-\sigma k).\ (\nu=0,1,\cdots) \tag{3.36}$$

而联结条件(3.38$_{3,4}$)为

$$\begin{cases} \bar{u}_{M\mu-1}^{(i)}(t+k) = u_{-\mu}^{(i+1)}(t+k), \quad (\mu = 1,2,\cdots,r_{i+1}) \\ \bar{u}_{-(\mu+1)}^{(i)}(t+k) = \sum_{\sigma=-1}^{s} \sum_{j=0}^{-q_2} D_{j\sigma}^{(\mu)} \bar{u}_{-j}^{(i)}(t-\sigma k) \\ + \sum_{\sigma=-1}^{s} \sum_{j=0}^{q_1} G_{j\sigma}^{(\mu)} u_j^{(i+1)}(t-\sigma k). \quad (\mu = 0,1,\cdots,p_i - 1) \end{cases} \tag{3.37}$$

此时同差分格式(3.36),(3.37)相容的微分方程为

$$u_t = \begin{pmatrix} -aM & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} u_x, u = \begin{pmatrix} \bar{u}^{(i)} \\ u^{(i+1)} \end{pmatrix}, \bar{u}^{(i)}(0,t) = u^{(i+1)}(0,t). \tag{3.38}$$

(3.36)的预解方程式为

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{Q}_{-1}^{(i)} & 0 \\ 0 & Q_{-1}^{(i+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum \bar{Q}_\sigma^{(i)} z^{-\sigma-1} & 0 \\ 0 & \sum Q_\sigma^{(i+1)} z^{-\sigma-1} \end{bmatrix} \right\} u^{(i,i+1)} = 0. \tag{3.39}$$

(3.36)通解为

$$u_\nu^{(i,i+1)} = \begin{pmatrix} \overline{u}_\nu^{(i)} \\ u_\nu^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{|\overline{x}^{(i)}|\leq 1} \overline{h}_j^{(i)}(\nu,z)\overline{x}_j^{(i)\nu}, \\ \sum\limits_{|x^{(i+1)}|\leq 1} h_j^{(i+1)}(\nu,z)x_j^{(i+1)\nu}, \end{pmatrix}$$

$$(\nu = 0,1,\cdots) \tag{3.40}$$

其中 $\overline{u}_\nu^{(i)}, u_\nu^{(i+1)}$ 均属于 L_2 的解，而 $\overline{x}_j^{(i)}, x_j^{(i+1)}$ 分别为特征方程式

$$\begin{cases} \mathrm{Det}\left(\sum\limits_{j=-p_i}^{r_i} \overline{A}_j^{(i)}(z)\overline{x}^{(i)j}\right) \\ = \mathrm{Det}\left(\sum\limits_{j=-p_i}^{r_i} (\overline{A}_{j-1}^{(i)} - \sum\limits_{0} \overline{A}_{j\sigma}^{(i)} z^{-\sigma-1})\overline{x}^{(i)j}\right) = 0, \\ \mathrm{Det}\left(\sum\limits_{j=-r_{i+1}}^{p_{i+1}} A_j^{(i+1)}(z)x^{(i+1)j}\right) \\ = \mathrm{Det}\left[\sum\limits_{j=p_{i+1}}^{-r_{i+1}} (A_{j-1}^{(i+1)} - \sum\limits_{\sigma} A_{j\sigma}^{(i+1)} z^{-\sigma-1})x^{(i+1)j}\right] = 0 \end{cases} \tag{3.41}$$

的内根. $\overline{h}_j^{(i)}(\nu,z)$ 是 ν 的多项式，其次数比 $\overline{x}_\sigma^{(i)}$ 的重数少 1. $h_j^{(i+1)}(\nu,z)$ 也是 ν 的多项式，其次数比 $x_\nu^{(i+1)}$ 的重数少 1. 由引理 3.4 可知 (3.41_1) 有 p_i 个内根，(3.41_2) 有 r_{i+1} 个内根. 故在解 $u_\nu^{(i,i+1)}$ 中有 $p_i + r_{i+1}$ 个参数 σ 的线性组合，代入 $R_i \cap R_{i+1}$ 中即 $(3.28_{3,4})$ 得

$$J_{i,i+1}(z)\sigma = 0. \quad (J_{i,i+1} \text{ 为 } p_i + r_{i+1} \text{ 阶矩阵}) \tag{3.42}$$

由 H. O. Kreiss[5] 及李欣恺、朴致淳[11] 的结果可得：

引理 3.5 $R_i + R_{i+1}, R_i \cap R_{i+1}$ 相耦合稳定的充要条件为

$$\mathrm{Det}J_{i,i+1}(z) \neq 0. \quad (|z| \geq 1)$$

现讨论对于 i=2 时两层套网格差分格式(3.23)为 G. K. S. 稳定的代数判别条件. 这时(3.23)可书为 $\hat{R}_0 + \hat{R}_1 + \hat{R}_2, \hat{R}_1 \cap \hat{R}_2$ 形式. 由[11]可知 $R_0 + R_1 + R_2$ 问题可分解为问题 A：$R_0 + R_1$ 初边值稳定性及问题 B：$R_1 + R_2, R_1 \cap R_2$ 纯初值耦合稳定性两问题. 若 A

为G.K.S.稳定,B为纯初值问题耦合稳定.则A+B也为耦合G.K.S.稳定.得:

引理3.6 $R_0+R_1+R_2$的初边值耦合G.K.S.稳定的行列式判别条件为

$$\det J_{0,1}\neq 0,\quad \det J_{1,2}\neq 0.\ (|z|\geqslant 1) \tag{3.43}$$

其次,讨论三层套网格差分格式$R_0+R_1+R_2+R_3$的初边值问题G.K.S.稳定的代数判别条件.

设$R_0+R_1+R_2$记为$R_0'+R_2$,(其中$R_0'=R_0+R_1$)作为问题A.应用[11]的同一原理,把i=3时的$R_0+R_1+R_2+R_3$分解为:

问题A:差分格式二层套网格求解$R_0+R_1+R_2=R_0'+R_2$的初边值耦合稳定问题.

问题B:差分格式R_2+R_3求解的纯初值耦合稳定问题.

由引理3.6可知问题A的耦合稳定的判别条件为(3.43).而问题B的耦合稳定的代数条件由引理3.5得$\mathrm{Det}J_{2,3}\neq 0.\ (|z|\geqslant 1)$再对于问题$R_0'+R_2+R_3$的耦合稳定问题再应用一次引理3.6即得

引理3.7 三层套网格差分格式$R_0+R_1+R_2+R_3$的耦合稳定的行列式判别条件为

$$\mathrm{Det}J_{0,1}\neq 0,\quad \mathrm{Det}J_{1,2}\neq 0,\quad \mathrm{Det}J_{2,3}\neq 0.\ (|z|\geqslant 1) \tag{3.44}$$

定理3.1 n层套网格差分格式MND,$R_0+R_1+\cdots+R_n$若

问题A:$R_0+R_1+\cdots+R_{n-1}$,n-1层初边值套网格差分格式为耦合G.K.S.稳定.

问题B:$R_{n-1}+R_n,R_{n-1}\cap R_n$是纯初值问题耦合稳定.

则n层套网格差分逼近$R_0+R_1+\cdots+R_n$也必耦合G.K.S.稳定.

证 令$R_0^1=R_0+\cdots+R_{n-2}$,把它看为初始算子R_0^1,则本问

题变为 $R_0^1+R_{n-1}+R_n$ 两层套网格的 G.K.S. 稳定问题. 由[11]可知它可分解为 1)问题 A:$R_0'+R_{n-1}$的初边值问题的 G.K.S. 稳定. 2)问题 B:$R_{n+1}+R_n$ 的纯初值耦合稳定问题. 关于这样的两层问题，应用[11]中定理 2.1 即可知 $R_0^1+R_{n-1}+R_n$ 为耦合初边值 G.K.S. 稳定. 即 $R_0+R_1+\cdots+R_n$ 为耦合初边值 G.K.S. 稳定，定理证毕.

应用引理 3.6，引理 3.7，定理 3.1 及数学归纳法即得：

定理 3.2 n 层套网格差分逼近 MND 为初边值耦合 G.K.S. 稳定的判别条件的代数形式为

$$\mathrm{Det}J_{1,i} \neq 0. \quad (i=1,2,\cdots,n;|z|\geqslant 1) \qquad (3.45)$$

§3.3 多重套网格差分逼近 MND 的耦合稳定判别条件的简便形式

定义 3.4 在边界条件(3.6)中，若 $C_{j\sigma}^{\natural}=C_{j\sigma}$则称为平移的边界条件.

定义 3.5 由(3.23₁)，(3.30)，(3.32)，(3.41)称

$$\hat{R}_0(z,x)=\sum_{j=0}^{m}(C_{j,-1}-\sum_{\sigma}C_{j\sigma}z^{-\sigma-1})x^j=0. \qquad (3.46)$$

为边界格式的特征方程.

$$\hat{R}_i(z,x)=\sum_{j=-r_i}^{p_i}(A_{j,-1}^{(i)}-\sum_{\sigma}A_{j\sigma}^{(i)}z^{-\sigma-1})x^j=0.$$

$$(i=1,2,\cdots) \qquad (3.47)$$

为分段内点格式的特征方程.

$$\hat{R}_i^-(z,x)=\sum_{j=-p_i}^{r_i}(\overline{A}_{j,-1}^{(i)}-\sum_{\sigma}\overline{A}_{j\sigma}^{(i)}z^{-\sigma-1})x^j=0. \ (\overline{A}_{j\sigma}^{(i)}=A_{-j\sigma}^{(i)})$$

$$(i=1,2,\cdots) \qquad (3.48)$$

为分段内点格式经过反射后的格式的特征方程.

定义 3.6 称特征方程 $\hat{R}_i$(或 $\hat{R}_i^-$，$i=1,2,\cdots$)的解满足 Von-Neumann 条件，如果 $\mathrm{Det}\hat{R}_i(z,x)=0$(或 $\mathrm{Det}\hat{R}_i^-(z,x)=0$)的

解 z,x 满足关系：

$$|x| = 1 \Rightarrow |z| \leqslant 1. \tag{3.49}$$

定义 3.7 称特征方程 $\hat{R}_i$(或 $\hat{R}_i^-$, $i=1,2,\cdots$)关于柯西问题相容稳定，如果 $\mathrm{Det}\hat{R}_i(z,x)=0$(或 $\mathrm{Det}\hat{R}_i^-(z,x)=0$)的解 z,x 满足 V-N 条件(即 $|x|=1 \Rightarrow |z| \leqslant 1$)及 $|z|=1$ 的根为单根.

定义 3.8 称特征方程 $\hat{R}_i$(或 $\hat{R}_i^-$, $i=1,2,\cdots$)的解为耗散的，如果它的解 z,x 满足关系

$$|x| = 1, x \neq 1 \Rightarrow |z| < 1. \tag{3.50}$$

M=1 情形

此时 $h_1=h_2=h_3=\cdots$，套网格的耦合匹配条件 $R_i \cap R_{i+1}$(公式(3.37))即

$$\begin{cases} \bar{u}^{(i)}_{\mu-1}(t) = u^{(i+1)}_{-\mu}(t) & (\mu = 1,2,\cdots,r_{i+1}) \\ \bar{u}^{(i)}_{-(\mu+1)}(t) = u^{(i+1)}_{\mu}(t). & (\mu = 0,1,\cdots,p_i - 1) \end{cases} \tag{3.51}$$

或联书为直接转移形式：

$$\bar{u}^{(i)}_{-(\mu+1)} = u^{(i+1)}_{\mu}, \quad (\mu = -r_{i+1},\cdots,-1,0,1,\cdots,p_i - 1 \quad i = 1,2,\cdots) \tag{3.52}$$

对于 R_0+R_1 问题(公式(3.15))

$$R_1: u^{(1)}_{\nu+1} = M_1 u^{(1)}_{\nu}, \quad R_0: Tu_1 = g_1 \tag{3.15}$$

的初边值 G.K.S. 稳定问题的判别法已见[8]中定理 3.1 到定理 3.4，(参看第三章定理 1.2 到 1.5)即：

引理 3.8

1)基本格式 R_1(3.12)(其特征方程 $\hat{R}_1$(3.47), $i=1$)为两层耗散格式. 2)其边界格式的特征方程式为 $\hat{R}_0(z,x)=0$, (3.46)且满足条件

$$\hat{R}_0(z,x) \neq 0. \quad (|z| \geqslant 1, 0 < |x| < 1) \tag{3.53}$$

则外流微分方程式(3.1)的初边值问题差分逼近 R_0, R_1(3.12),(3.13)为初边值问题 G.K.S. 稳定.

引理 3.9 设 1)基本格式 R_1(3.12)(其特征方程 $\hat{R}_1$(3.47),$i=1$)为耗散格式. 2)边界格式的特征方程(3.46)满足(3.53). 3)满足关系式

$$\hat{R}_0(z,1) \neq 0. \quad (|z| = 1, z \neq 1) \tag{3.54}$$

则外流微分方程式(3.1)的初边值问题差分逼近 R_0,R_1(3.12),(3.13)为 G.K.S. 稳定.

引理 3.10 设 1)基本格式 R_1(3.12)(其特征方程(3.47),$i=1$)为耗散. 2)(3.54)成立. 3)边界格式 R_0 为可解并满足 V-N 条件(3.49).

则外流微分方程式(3.1)的初边值问题差分逼近 R_0,R_1(3.12),(3.13)为 G.K.S. 稳定.

引理 3.11 若 1)基本格式 R_1(3.12)(其特征方程 $\hat{R}_1$(3.47),$i=1$)为耗散或酉格式. 2)公式(3.54)成立. 3)边界格式为可解耗散.

则外流微分方程式(3.1)的初边值问题的差分逼近 R_0+R_1(3.12),(3.13)为 G.K.S. 稳定.

由上述各引理,可得下列判别二层套网格差分逼近的稳定性的简便方法.

定理 3.3 设 1)R_i,R_{i+1}是任意格式($i=1,2,\cdots$)分别对于柯西问题相容稳定.(即满足 V-N 条件,及$|z|=1$ 的根为单根.)

2)特征方程式 $\hat{R}_i$,$\hat{R}_{i+1}$的根满足条件:

$$F_i^-(z) \cap F_{i+1}^-(z) = \varnothing, \quad (|z| = 1, i = 1,2,\cdots) \tag{3.55}$$

其中

$$\begin{cases} F_i(z) = \{\overline{x}^{(i)}: \sum\limits_{l=-p_i}^{r_i} A_l^{(i)}(z)(\overline{x}^{(i)})^l = 0 \text{ 的内根}\}, \\ F_{i+1}(z) = \{x^{(i+1)}: \sum\limits_{l=-r_{i+1}}^{p_{i+1}} A_l^{(i+1)}(z)(x^{(i+1)})^l = 0 \text{ 的内根}\}, \end{cases} \tag{3.56}$$

则格式 $R_i+R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$ 为耦合而且是纯初值问题稳定.

证 由差分格式(3.36)的预解式(3.39)可知其解为(3.40). 代入(3.52) $\overline{u}^{(i)}_{(\nu-1)}=u^{(i+1)}_{(\mu)}$, $(\mu=-r_{i+1},\cdots,p_i-1)$ 其中 $|\overline{x}_j^{(i)}|\leqslant 1$, $|x_j^{(i+1)}|\leqslant 1$ 分别为(3.41)的 m_j 及 l_j 重内根. (即(3.56)) $\overline{h}_j^{(i)}(\nu,z)$, $h_j^{(i+1)}(\nu,z)$ 分别为对于 ν 的 m_j-1 次及 l_j-1 次多项式, 而且 $\sum m_j=p_i$, $\sum l_j=r_{i+1}$. $\overline{h}_j^{(i)}(\nu,z)$ 的待定系数共有 p_i 个. $l_j^{(i+1)}(\nu,z)$ 的待定系数共有 r_{i+1} 个. 把(3.40)代入(3.52)后得:

$$\sum \overline{h}_j^{(i)}(-(\nu+1),z)(\overline{x}_j^{(i)}(z))^{-\nu-1}-\sum h_j^{(i+1)}(\nu,z)$$
$$(x_j^{(i+1)}(z))^{\nu}=0. \quad (\nu=-r_{i+1},\cdots,p_i-1) \tag{3.57}$$

它是待定系数 σ 的线性方程组, 可书为

$$J_{i,i+1}(z)\sigma=0. \quad (|z|\geqslant 1) \tag{3.58}$$

$J_{i,i+1}(z)$ 是关于 $\overline{x}_j^{(i)}$, $x_j^{(i+1)}$ 的范得蒙行列式. 由代数可知 $\operatorname{Det}J_{i,i+1}(z)\neq 0$ 的充要条件为

$$x_l^{(i+1)}\neq(\overline{x}_k^{(i)})^{-1}. \quad (|z|\geqslant 1) \tag{3.59}$$

若 $|z|>1$, 此时由于满足 V-N 条件, 故有 $|x_j^{(i+1)}|<1$ $|\overline{x}_k^{(i)}|<1$, 则(3.59)必成立. 但是当 $|z|=1$ 是否成立? 由假定(3.55)即 $x_j^{(i+1)}\neq(\overline{x}_k^{(i)})^{-1}$, 故 $|z|=1$ 也成立, 即(3.59)对 $|z|\geqslant 1$ 均成立. 由(3.56)可知 $\operatorname{Det}J_{i,i+1}(z)\neq 0$. 再由引理 3.5 可知 $\hat{R}_i+\hat{R}_{i+1}$ 为耦合而且纯初值问题稳定的. 定理 3.3 证毕.

注 当 $r_{i+1}=0$ 时, 由上述证明可看到 F_{i-1} 为空集. 故(3.55)及(3.59)一定成立. 因此 R_i+R_{i+1} 一定是耦合纯初值问题稳定. 换言之, 当 $r_{i+1}=0$ 时 R_{i+1} 是自开始格式, 可接在任意稳定格式之后.

附带说明, 对于(3.55)当 $z=1$ 时一定成立. 这因为对于(3.39_1), $(z,x)=(1,1)$ 为内根, 但对于(3.39_2), $(z,x)=(1,1)$ 为外根, 故在排除之列. 即(3.55)成立.

定理 3.4 设 1)R_i, R_{i-1}($i=1,2,\cdots$)是任意格式，分别对于柯西问题相容稳定. 且 2)满足(3.55). 3)R_1 为耗散格式. 4)条件(3.54)成立. 5)R_0 为可解满足 V-N 条件.

则多层套网格差分格式 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots, R_i\cap R_{i+1}$($i=1,2,\cdots$)为耦合而且是初边值问题 G.K.S. 稳定.

(注:MND 格式见(3.2),(3.5),(3.6),(3.7),(3.8)…)

证 由 3),4),5)及引理 3.10 可知 R_0+R_1 为初边值问题 G.K.S. 稳定.而且有 $J_{0,1}(z)\neq 0$. ($|z|\geq 1$)由 1),2)及定理 3.3 可知格式 R_i+R_{i+1} 为耦合而且稳定.再由定理 3.2 即得所求的结果.

定理 3.5 设 1)R_i, R_{i-1}($i=1,2,\cdots$)为任意格式，分别对于柯西问题相容稳定. 若 2)满足条件(3.55). 3)R_1 为耗散格式或酉格式. 4)$\hat{R}_0$ 满足(3.54). 5)R_0 为可解耗散.

则 n 层套网格格式 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots, R_i\cap R_{i+1}$($i=1,2,\cdots$)为耦合而且为初边值问题 G.K.S. 稳定.

证 由 3),4),5)及引理 3.11 可知 R_0+R_1 为初边值问题 G.K.S. 稳定.再由 1),2)定理 3.3 及定理 3.2 即得所要求结果.

由文章[8]中引理 5.1(参看第三章引理 1.11),可得:

引理 3.12 对于 $\partial u/\partial t=a\partial u/\partial x$ 的差分逼近式(3.2)(3.6),设其预解方程式(3.23)$\hat{R}_i$ 当 $a>0$ 时,则$(z,x)=(1,1)$为特征方程式 $\mathrm{Det}\hat{R}_i=0$($i=1,2,3,\cdots$)的外根.当 $a<0$ 时,则$(z,x)=(-1,1)$为特征方程式 $\mathrm{Det}\hat{R}_i=0$ 的外根.

引理 3.13 关于偏微分方程式 $\partial u/\partial t=\partial u/\partial x$ 的差分逼近 $\overline{R}_i$ 及 R_i($i=1,2,\cdots$)其中 $\overline{R}_i$ 为 R_i 的反射,则$(z,x)=(-1,1)\notin F_i$, $(1,1)\notin F_i$.

证 由引理 3.12 可知其均为外根,故在排除之列.

引理 3.14 设 1)R_i, R_{i+1} 为柯西相容稳定. 2)R_i 或 R_{i+1} 至少有一个为耗散,不超过三层格式.则 R_i+R_{i+1} 为耦合而且纯初

值问题稳定.

证 1)由引理 3.12 可知$(z,x)=(-1,1)$或$(z,x)=(1,1)$为外根. 2)由于耗散,故$|x|=1, x\neq 1, |z|<1$. 故$|z|\geq 1$时,由于不超过三层,故没有除上述外$x=1, |z|=1$的内根. 故$F_i^{-1}(z)\cap F_{i-1}(z)=\varnothing$. $(|z|=1)$. 3)由引理 3.13 知(3.55)成立. 4)由定理 3.3 可知R_i+R_{i-1}为耦合及纯初值问题稳定.

引理 3.15 若 1)$R_i, R_{i-1}(i=1,2,\cdots)$为柯西相容稳定,(见定义 3.7)至少有一不超过三层. 2)i 为奇数时R_i为耗散格式或 i 为偶数时,R_i为耗散格式. 则$R_i+R_{i+1}, R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为耦合纯初值问题稳定.

定理 3.6 若 1)R_i, R_{i+1}分别为柯西问题相容稳定,(见定义 3.7)至少有一不超过三层. 2)R_i(i 为奇数)为耗散格式. 3)(3.53):$\hat{R}_0(z,x)\neq 0$, $(|z|\geq 1, 0<|x|<1)$成立. 4)(3.54)$\hat{R}_0(z,1)=0$, $(|z|=1, z\neq 1)$成立.

则外流微分方程式(3.1)的多层套网格差分逼近 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots+$, $R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为耦合而且初边值问题 G.K.S. 稳定.

证 1)由引理 3.9 可知R_0+R_1为耦合而且为初边值问题 G.K.S. 稳定. 2)由引理 3.14,引理 3.15,可知R_i+R_{i+1}为耦合纯初值问题稳定. 3)再由引理 3.4,引理 3.5 及定理 3.2 即得所要求结果.

定理 3.7 若 1)$R_i(i=1,2,\cdots)$为柯西问题相容稳定,(见定义 3.7)相联接格式中至少有一不超过三层. 2)R_i(i 为偶数)为耗散格式. 3)(3.54)成立, 4)R_0为可解耗散格式.

则多层套网格差分逼近 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots$, $R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为耦合初值问题 G.K.S. 稳定.

证 1)由引理 3.11 可知R_0+R_1为耦合初边值问题 G.K.

S. 稳定. 2)由引理 3.14 可知(3.55)成立，及 R_i+R_{i+1} 为耦合纯初值问题稳定. 3)由定理 3.2 可得所要求的结果.

定理 3.8 若 1)$R_i(i=1,2,3,\cdots)$ 为柯西问题相容稳定.(见定义 3.7)相邻格式中至少有一不超过三层. 2)R_1 为耗散，3)R_i(i 为偶数)为耗散. 4)(3.54)成立. 5)R_0 可解满足 V-N 条件. 则外流微分方程式(3.1)的多层套网格差分逼近 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots$，$R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$ 为耦合初边值问题 G. K. S. 稳定.

证 1)由引理 3.10 可知 R_0+R_1 为初边值问题 G. K. S. 稳定. 2)由引理 3.14 得(3.55)成立. R_i+R_{i+1} 为耦合纯初值问题稳定. 3)由引理 3.4，引理 3.5，定理 3.2 可得所要求的结果.

M>1 的情形

引理 3.16 若 1)差分格式 R_i，R_{i+1} 分别对于柯西问题相容稳定.(见定义 3.7) 2)设 $p_i=1$，$M_{i,i+1}=h_{i+1}/h_i>1$.(由密到稀网格)若 3)条件

$$\mathrm{F}_i^{M}(z)\cap \mathrm{F}_{i+1}(z)=\varnothing,\quad(|z|=1)\tag{3.60}$$

其中

$$\begin{cases}\mathrm{F}_i^{M}(z)=\{(\overline{x}^{(i)})^{M}:\overline{x}^{(i)}\in\sum\limits_{l=-p_i}^{r_i}\overline{A}_l^{(i)}(z)(\overline{x}^{(i)})^{l}=0\text{ 的内根}\},\\ \mathrm{F}_{i+1}(z)=\{x^{(i+1)}\in\sum\limits_{l=-r_{i+1}}^{p_{i+1}}A_l^{(i+1)}(z)(x^{(i+1)})^{l}=0\text{ 的内根}\},\end{cases}\tag{3.61}$$

则差分格式 R_i+R_{i+1} 为耦合而且纯初值问题稳定.

证 由于 $p_i=1$ 由特征方程式(3.41_1)

$$\mathrm{Det}\Big(\sum_{j=-p_i}^{r_i}(\overline{A}_{j-1}^{(i)}-\sum_{\sigma}\overline{A}_{j\sigma}^{(i)}z^{-\sigma-1})\overline{x}^{(i)j}\Big)=0.$$

及引理 3.3 可知 $\overline{R}_i$ 的特征方程式只有一个内根 $\overline{x}_1^{(i)}$，由此 $\overline{R}_i+R_{i+1}$的通解可书为形式

$$u_\nu^{(i,i+1)}=\begin{Bmatrix}\overline{u}_\nu^{(i)}\\ u_\nu^{(i+1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\alpha(\overline{x}_1^{(i)})^\nu\\ \sum\limits_{|x_j^{(i+1)}|\leqslant 1}h_j^{(i+1)}(\nu,z)(x_j^{(i+1)})^\nu\end{Bmatrix}. \tag{3.62}$$

这时联接条件(3.52)可书为形式

$$\overline{u}_{M\mu-1}^{(i)}=u_{-\mu}^{(i+1)}.\quad(\mu=0,1,\cdots,r_{i+1}) \tag{3.63}$$

得到齐次方程(3.57)

$$\alpha(\overline{x}_1^{(i)})^{\nu M-1}-\sum_{j=1}^{d_1}h_j^{(i+1)}(-\nu,z)(x_j^{(i+1)})^{-\nu}=0. \tag{3.64}$$

$$(\nu=0,1,\cdots,r_{i+1})$$

因此待定未知数 α,…等的系数构成了

$$\overline{x}_1^{(i)M},x_1^{(i+1)},\cdots,x_{d_1}^{(i+1)},$$

的范得蒙行列式. 当只当

$$\overline{x}_1^{(i)M}\neq(x_j^{(i+1)})^{-1},\quad(j=1,\cdots,d_1) \tag{3.65}$$

时条件 $\mathrm{Det}J_{i,i+1}(z)\neq0(|z|\geqslant1)$成立. 由于 $\overline{x}^{(i)},x_j^{(i+1)}$ 为内根，故当 $|\overline{x}_1^{(i)}|<1,|x_j^{(i+1)}|<1$ 时，(3.65)成立. 但 $\overline{R}_i,R_{i+1}$满足柯西条件. 当$|x_1^{(i)}|=1,|x^{(i+1)}|=1\Rightarrow|z|\leqslant1$. 因此当$|z|>1$时，必有$|x_1^{(i)}|<1,|x_j^{(i+1)}|<1$. 故条件(3.65)成立. 故当假定(3.60)$\overline{F}^{-M}(z)\cap F_{i+1}(z)=\varnothing$,($|z|=1$)成立时，一定有 $\mathrm{Det}J_{i,i+1}(z)\neq0$. ($|z|\geqslant1$)故由引理 3.5 可得 R_i+R_{i+1}为耦合而且为纯初值问题稳定. 引理 3.16 证毕.

这说明了 $M_{i,i+1}=h_{i+1}/h_i>1$，即由密网格变为稀网格的耦合稳定所需的条件. 对于由稀变为密情况，则有如下的引理：

引理 3.17 若 1)差分格式 R_i,R i+1分别对于柯西问题相容稳定. 2)设 $r_{i+1}=1$(或 $r_{i+1}=0$)$M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$. (由稀变

密）． 3）若条件

$$\bar{F}_i^{-1}(z)\cap F_{i+1}(z)^M=\varnothing(|z|=1) \tag{3.66}$$

满足，其中

$$\bar{F}_i(z)=\{\bar{x}^{(i)}:\sum_{l=-p_i}^{r_i}\bar{A}_l^{(i)}(z)(\bar{x}^{(i)})^l=0\text{ 的内根}\},$$

$$F_{i+1}(z)=\{x^{(i+1)}:\sum_{l=-r_{i+1}}^{p_{i+1}}A_l^{(i+1)}(z)(x^{(i+1)})^l=0\text{ 的内根}\}. \tag{3.67}$$

则差分格式 R_i+R_{i+1} 为耦合而且纯初值问题柯西稳定．

证　由于 $r_{i+1}=1$，故特征方程式（3.41₂）

$$\mathrm{Det}\left(\sum_{j=-r_{i+1}}^{p_{i+1}}\left(A_{j1}^{(i+1)}(z)-\sum_{\sigma}A_{j\sigma}^{(i+1)}z^{-\sigma-1}\right)x^{(i+1)j}\right)=0$$

只有一个内根 $|x^{(i+1)}|\leqslant 1$．由此 $\bar{R}_i,R_{i+1}$ 的通解可书为形式

$$\{u_\nu^{(i,i+1)}\}=\begin{Bmatrix}\bar{u}_\nu^{(i)}\\ u_\nu^{(i+1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{|\bar{x}^{(i)}|\leqslant 1}\bar{h}^{(i)}(\nu,z)(\bar{x}^{(i)})^\nu,\\ \alpha x^{(i+1)\nu}\end{Bmatrix} \tag{3.68}$$

当由稀变密时，$M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$．（3.8）式用在原点的右方（即密的一方），格式变为

$$u_{\mu M}^{(i+1)}(t+k)=u_\mu^{(i)}(t+k).$$

$$(\mu=1,2,\cdots,p_i) \tag{3.69}$$

因为 $u_{-\mu}^{(i+1)}$ 在稀网格中没有相应的网格点，故必须用插值法求出．故（3.8）式成为下列形式：

$$u_{-\mu}^{(i+1)}(t+k)=\sum_{\sigma=-1}^{s}\sum_{j=0}^{-q_1}D_{j\mu}^{(\mu)}u_{-1+j}^{(i)}(t-\sigma k)$$

$$+\sum_{\sigma=-1}^{s}\sum_{j=0}^{l_2}G_{j\mu}^{(\mu)}u_j^{(i+1)}(t-\sigma k).\quad(\mu=0,1,\cdots,r_{i+1}-1) \tag{3.70}$$

若 $r_{i+1}=1$，则上式只有一个方程式，即

$$u_0^{(i+1)}(t+k)=u_0^{(i)}(t+k). \tag{3.71}$$

合并(3.69)，(3.71)联接条件变为直接转移形式：

$$u_{M_\mu}^{(i+1)}=u_\mu^{(i)}. \quad (\mu=0,1,\cdots,p_i) \tag{3.72}$$

再把反射变换(3.30)$u_\nu^{(i)}(t)=u_{-(\nu+1)}^{(i)}$（或 $\overline{u}_{-(\nu+1)}^{(i)}=u_\nu^{(i)}$）代入(3.72)得

$$u_{M_\mu}^{(i+1)}=\overline{u}_{-(\mu+1)}^{(i)}. \quad (\mu=0,1,\cdots,p_i) \tag{3.73}$$

因为这时由稀变密的原故．把(3.68)代入后得

$$\sum_{j=1}^{q_2}F_j^{(i)}(\nu,z)(\overline{x}_j^{(i)})^{-\nu-1}-\alpha(x^{(i+1)})^{M\nu}=0.$$

$$(\nu=0,1,\cdots,p_i) \tag{3.74}$$

它的待定未知数 α，…等的系数是关于$(x^{(i+1)})^M$，$\overline{x}_1^{(i)}$，…，$\overline{x}_{q_2}^{(i)}$的范得蒙行列式．若

$$(\overline{x}_j^{(i)})^{-1}\neq(x^{(i+1)M}), \tag{3.75}$$

即(3.66)：$F_{(i)}^{-1}(z)\cap F_{(i+1)}^M(z)=\varnothing(|z|=1)$成立，则有 $\mathrm{Det}J_{i,i+1}(z)\neq0(|z|\geqslant1)$．由于 $\overline{x}_j^{(i)}$，$x^{(i+1)}$为内根，故当$|\overline{x}_j^{(i)}|<1$，$|x^{(i+1)}|<1$时，(3.75)成立．由于 R_i，R_{i+1}满足柯西条件，即当$|x^{(i)}|=1$，或$|x^{(i+1)}|=1$ 时$\Rightarrow|z|\leqslant1$．故当$|z|>1$时，必有$|\overline{x}^{(i)}|<1$，$|x^{(i+1)}|<1$．即(3.75)成立．因此当$|z|=1$时，如果(3.66)成立．这时必有$\mathrm{Det}J_{i,i+1}(z)\neq0(|z|\geqslant1)$成立．由引理 3.5 可知 R_i+R_{i+1}为耦合纯初值问题稳定．

注　由上式证明中可看到，若 $r_{i+1}=0$，则 F_{i+1}为空集．故(3.66)及(3.75)一定成立．则 R_i，R_{i+1}必为耦合柯西稳定．因此时 R_{i+1}为自开始格式，可接在任意稳定格式之后．

由上所述两引理，可得对于 n 层套网格格式当 $M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$．(由稀变密)或 $M_{i,i+1}=h_{i+1}/h_i>1$(由密变稀)相互耦合格式的纯初值问题的判别法可转变为初边值问题 G. K. S. 稳定的判别

法.

定理 3.9 设 1)差分格式 $p_i=1$ 或 $r_{i+1}=1$.(或 $r_{i+1}=0$) 2)$R_i(i=1,2,\cdots)$分别对于柯西问题相容稳定. 3)设 R_i 格式的网格比 $M_{i-1,i}=h_i/h_{i-1}>1$,由密变稀,$M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$,由稀变密.$(i=2,4,6,\cdots)$若 4)

$$(\overline{F}_{i-1})^{-M}(z)\cap F_i(z)=\varnothing,\quad(|z|=1)\qquad(3.60)$$

$$(\overline{F})^{-1}(z)\cap F_{i+1}^{M}(z)=\varnothing,\quad(|z|=1)\qquad(3.66)$$

成立. 5)边界格式 R_0 为可解耗散. 6)$\hat{R}_0(z,1)\neq0(|z|=1,z\neq1$,(3.54)成立) 7)$R_1$ 为耗散或酉格式.

则外流微分方程式(3.1)的多层套网格差分逼近 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots,R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为耦合初边值问题 G.K.S.稳定.

证 1)由引理 3.16,3.17 可知套网格差分格式 $R_{i-1}+R_i$,$R_i+R_{i+1}(i=2,4,6,\cdots)$为耦合纯初值问题稳定,即 $\mathrm{Det}J_{i,i+1}(z)\neq0$.$(i=1,2,3,\cdots)$,$(|z|\geqslant1)$. 2)由引理 3.11 可知 R_0+R_1 为耦合初边值 G.K.S.稳定.即 $\mathrm{Det}J_{0,1}(z)\neq0(|z|\geqslant1)$ 3)由引理 3.4,引理 3.5,定理 3.2 可得所求的结果.

定理 3.10 设 1)$p_i=1$ 或 $r_{i+1}=1$.(或 $r_{i+1}=0$) 2)差分格式 $R_i(i=1,2,3,\cdots)$对于柯西问题相容稳定. 3)R_1 为耗散格式,$M_{i-1,i}=h_i/h_{i-1}>1$,$M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$.$(i=2,4,6,\cdots)$ 4)(3.60),(3.66)成立. 5)边界格式 R_0 为可解满足 V-N 条件. 6)(3.54)成立.

则外流微分方程式(3.1)的多层套网格差分格式 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots,R_i\cap R_{i-1}(i=1,2,\cdots)$为耦合初边值问题 G.K.S.稳定.

证 这同定理 3.9 只有 3),5)条件不同,除了应用引理 3.10 代替引理 3.11 外,其它证明完全相同.证毕.

定理 3.11 设 1)$r_{i-1}=1$(或 $r_{i-1}=0$)或 $p_i=1$, 2)差分格式 $R_i(i=1,2,3,\cdots)$对于柯西问题相容稳定. 3) R_1 为两层耗散格式 $M_{i-1,i}=h_i/h_{i-1}>1$. $M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$. $(i=2,4,6,\cdots)$ 4)(3.60),(3.66)成立. 5)$\hat{R}_0(z,x)\neq 0$. ($|z|\geqslant 1,0<|x|<1$ 即(3.53)成立)

则外流微分方程式(3.1)的多层套网格差分逼近 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots,R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为耦合初边值问题 G.K.S.稳定.

证 这同定理 3.9,3.10 只有 3),5),6)不同,除了应用引理 3.8 代替引理 3.10 外,其它相同,证毕.

定理 3.12 设 1)$p_i=1$,或 $r_{i+1}=1$(或 $r_{i+1}=0$). 2)差分格式 $R_i(i=1,2,3,\cdots)$为柯西相容稳定. 3)R_1 为多层耗散格式,$M_{i-1,i}=h_i/h_{i-1}>1$,$M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$. $(i=2,4,6,\cdots)$ 4)(3.60),(3.66)成立. 5)$\hat{R}_0(z,x)$满足(3.53). 6)$\bar{R}_0(z,x)$满足(3.54).

则外流微分方程(3.1)的多层套网格差分格式 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots,R_i\cap R_{i-1}(i=1,2,\cdots)$为耦合初边值问题 G.K.S.稳定.

证 同定理 3.9,3.10 相比,除了 3),5)不同及应用引理 3.9 代替引理 3.11 外,其余证明相同.

引理 3.18 设 1)$R_i,R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为柯西相容稳定.(见定义 3.7) 2)$p_i=1$ 或 $r_{i+1}=1$(或 $r_{i-1}=0$)$M_{i,i+1}=h_{i+1}/h_i>1$(由密到稀)或 $M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$.(由稀到密) 3)R_i 或 R_{i+1}至少有一个为耗散,至少有一个不超过三层.

则 R_i+R_{i+1}为耦合而且为纯初值问题稳定.

证 1)由于耗散,故 $|x|=1,x\neq 1\Rightarrow|z|<1$. 故 $|z|\geqslant 1$ 时没有 $|x|=1$ 的根. 故得

$$\bar{F}_i^M(z) \cap F_{i+1}(z) = \varnothing, \quad (|z| = 1, z \neq \pm 1)$$

$$\bar{F}_i^1(z) \cap \bar{F}_{i+1}^M(z) = \varnothing. \quad (|z| = 1, z \neq \pm 1)$$

2)由引理 3.12，可知$(z,x)=(-1,1)$对于 $\bar{F}_i$ 为外根，不属于 $\bar{F}_i$ 的集合中. 而$(z,x)=(1,1)$对于 F_i 为外根，也不属于 F_i 中. 故只讨论 $x=1$ 的情形. 由于格式不超过三层，故除了$(z,x)=(\pm 1,1)$的解外，没有$|z|=1$ 的根. 故(3.60)或(3.66)均成立. 再由引理 3.16 或引理 3.17 可知不论是由密到稀或由稀到密，差分格式 R_i+R_{i+1}为耦合纯初值稳定的. 证毕.

注　引理 3.18 对于 $M=1$ 也成立，这只要参看[11]的推论 4.1 即得.

定理 3.13　设 1)$p_i=1$ 或 $r_{i-1}=1$.（或 $r_{i+1}=0$）　2)$R_i(i=1,2,3,\cdots)$为柯西问题相容稳定.　3)R_1 为耗散格式，$M_{i-1,i}=h_i/h_{i-1}>1$，$M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$.（$i=2,4,6,\cdots$，即稀密相间，）　4)R_i($i\neq 1$ 的奇数，或 i 为偶数)为耗散格式，相邻格式至少有一不超过三层.　5)边界格式 R_0 为可解耗散.　6)(3.54)成立.

则外流微分方程(1)的多层套网格差分逼近 MND:$R_0+R_1+R_2+R_3+\cdots$，$R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为耦合初边值问题 G. K. S. 稳定.

证　同定理 3.9 比较，除了 4)不同外，其它均相同. 故由引理 3.18，可知(3.60)，(3.66)也成立. 证毕.

定理 3.14　设 1)$p_i=1$ 或 $r_{i+1}=1$.（或 $r_{i+1}=0$）　2)$R_i(i=1,2,3,\cdots)$对于柯西问题相容稳定.　3)R_1 为耗散格式，$M_{i-1,i}=h_i/h_{i-1}>1$，$M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$.　4)R_i(i 为奇数但不等于 1，或 i 为偶数)为耗散格式.　5)R_0 为可解，但满足 V-N 条件.　6)(3.54)成立.

则外流微分方程式(3.1)的多层套网格差分逼近 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots$，$R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为耦合初边值问题 G. K. S. 稳

定.

证 同定理 3.10 比较,除了 4)不同外,其它均相同,再由引理 3.18 可知(3.60),(3.66)成立. 证毕.

定理 3.15 设 1)$p_i=1$ 或 $r_{i+1}=1$.(或 $r_{i+1}=0$) 2)$R_i(i=1,2,3,\cdots)$对于柯西问题相容稳定. $M_{i-1,i}=h_i/h_{i-1}>1$, $M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$. $(i=2,4,6,\cdots)$ 3)R_1 为两层耗散格式. 4)R_i(i 为奇数不等于 1 或 i 为偶数)为耗散格式. 5)(3.53)成立.

则外流微分方程式(3.1)的多层套网格差分逼近 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots$,$R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为耦合初边值问题 G.K.S. 稳定.

证 同定理 3.11 比较,除 4)外完全相同,故由引理 3.18 可知(3.60),(3.66)成立,证毕.

定理 3.16 设 1)$p_i=1$ 或 $r_{i+1}=1$.(或 $r_{i+1}=0$) 2)差分格式 $R_i(i=1,2,3,\cdots)$为柯西相容稳定,$M_{i-1,i}=h_i/h_{i-1}>1$,$M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$. $(i=2,4,6,\cdots)$ 3)R_1 为多层耗散格式 4)$R_i(i\neq1$ 的奇数或 i 为偶数)为耗散格式. 5)$\dot{R}_0$ 满足(3.53). 6)$\dot{R}_0$ 满足(3.54).

则外流微分方程(3.1)的多层套网格差分逼近 MND:$R_0+R_1+R_2+\cdots$,$R_i\cap R_{i+1}(i=1,2,\cdots)$为耦合初边值问题 G.K.S. 稳定.

证 同定理 3.12 比较,除了 4)不同外,其它均相同,由引理 3.18 可知(3.60),(3.66)满足,证毕.

§4 双曲型方程多重套网格差分方法的联接技巧及算例

§4.1 引言 本节给出了双曲型偏微分方程式多重套网格

差分方法的若干算例，并对于网格比 M 非整数及 $p_i>1, r_{i+1}>1$ 时，提出一个稳定的联接技巧及其算例.

关于双曲型偏微分方程式

$$\partial u/\partial t = \partial u/\partial x, u(x,0) = f(x). \quad (0 \leqslant x < \infty, t > 0) \tag{4.1}$$

在 x 轴的不同区域中应用不同网格及不同差分格式的相耦合稳定问题. 首先由 M. Ciment 在 1971，1972[2],[3] 在原点两侧应用相同网格不同格式或相同格式不同网格得到纯初值柯西问题稳定性的判别方法. 其次在 1978—1987 由 H. O. Kreiss, E. Tadmor[4]-[10] 提出了初边值问题 G. K. S. 稳定的一系列简便的稳定性判别方法. 1989 李欣恺、朴致淳[11] 提出关于两区间中应用不同格式及不同网格的套网格的初边值问题，并得到一些简便的稳定性判别方法. 最后 1991 陈传淡[12]-[14],[18]-[21] 推广此种思想到多重套网格双曲型差分逼近初边值问题稳定性的简便判别方法. 即把 x 轴分割为若干区间(多于 2 个)并在不同区间中应用不同格式及不同网格形式，而讨论其相互耦合及 G. K. S. 稳定的简便判别方法.

但上述[12]-[14] 各文的讨论均限制格式满足下列两个条件：

1)两个相邻两区间的网格比 $M=h_i/h_{i+1}>1$ 由稀变密，或 $M=h_{i+1}/h_i>1$ 由密变稀. 而且 M 为整数.

2)相邻两个区间的双边差分格式中，必须满足 $p_i=1$，或 $r_{i+1}=1$，其中 p_i, r_i 为第 i 区间 $(i-1,i)$ 中所用的基本格式 R_i 中横向点数.

$$R_i: Q_{-1}^{(i)} u_\nu^{n+1} = \sum_{\sigma=0}^{s} Q_\sigma^{(i)} u_\nu^{n-\sigma}, Q_\sigma = \sum_{j=-r_i}^{p_i} A_{\sigma j}^{(i)} E_j. \tag{4.2}$$

若没有上述限制，那么多重套网格差分逼近的耦合稳定问题的判别法是非常困难而又复杂的. 在理论上尚未建立. 在这种情况下，R_i 或 R_{i+1} 的特征方程式均有多个内根，$|x^{(i)}| \leqslant 1$. $|x^{(i+1)}| \leqslant 1$，因

此要确定

$$|\overline{x}_K^{(i)}|^M \neq |x_j^{(i+1)}|^{-1},\text{或} |x_j^i|^{-1} \neq |x_K^{(i+1)})|^M$$

的条件是很复杂的.而且当 M 非整数时,应用插值法的联接关系,则 $J_{i,i+1}\sigma==0$ 更具有复杂的形式,寻求 $\mathrm{Det}J_{i,i+1}\neq 0$ 的条件更为困难了.因为它涉到高阶代数方程式求解时是否存在模小于等于 1 的内根的全面讨论.特别对于 M>1 时,要确定两个代数方程式是否有模等于 1 的根而又不相等的内根的条件以及 $\mathrm{Det}J_{i,i+1}\neq 0$ 的条件是非常困难的.

本节应用联接技巧来避开此困难.因为对 R_i 及 R_{i+1} 当 M>1 而又非整数,$p_i>1$ 及 $r_{i+1}>1$ 时,在区间[i-1,i]的最后 p_i 点的 u_j^{n+1} 不能用 R_i 格式计算.因为它的网格点扩展到区间外,而由于 M>1 非整数,扩展后找不到它的对应网格点.同理在[i,i+1]的开始 r_{i+1} 点的 u_j^{n+1} 也不能用 R_{i+1} 格式计算.因此对这些 $p_i+r_{i+1}-1$ 点用 Lax-Wendroff 格式 $Q_{i,i+1}$ 计算.那么可以证明:$R_i+Q_{i,i+1}+R_{i+1}$ 是耦合而且纯初值问题柯西稳定的.这称为联接技巧.

§4.2 M>1,M 为整数,而且 $p_i=1$ 或 $r_{i+1}=1$(或 $r_{i+1}=0$)时的耦合稳定的若干判别定理

在这种情形下,主要根据下列引理及定理来判别多重套网格初边值问题差分格式的稳定性.这里常用到的是前节引理 3.5(参看[11]P.389 的问题 B)及前节引理 3.18 或定理 3.13 等等.

§4.3 M>1,M 为整数,$p_i=1$ 或 $r_{i+1}=1$ 情形下的若干计算实例

对于标准方程式(4.1)给出若干计算实例.为叙述方便起见,把[0,∞)分为 7 个区间,[0,1],[1,2],…,[5,6],[6,∞),在区间[i-1,i]中基本格式为 R_i(4.2).网格比为 $\lambda_i=n_i/N$.N 为时间层数.空间步长为 $h_i=1/n_i$.时间步长为 $k=1/n$.$m_i=\sum_{j=1}^{i} n_j$ 第 7 区间

的格式与第6区间相同.步长也与第6区间相同.设第6区间格式R_6的双边横向宽度为p_6, r_6,则一般在第7区间内的步数将计算到$m_6+p_6(N-n)$为止.这样,在第N时间层时,刚好计算到第6区间的末端为止.

$R_i \cap R_{i-1}$所用的格式.并依据$p_i=1$或$r_{i+1}=1$及$M_{i,i+1}=h_{i+1}/h_i>1$(由密到稀)或$M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$(由稀到密)分为下列二种情形讨论:

①$p_i=1, r_{i+1}>1, M_{i,i+1}=h_{i+1}/h_i>1$为整数,由于$p_i=1$,故在$(m_i-1,\cdots,m_i+r_{i+1}-1)$中均用格式$R_i$,但步长不同.这时由密到稀.

$$\begin{cases} \text{在 } m_i-1 \text{ 点用 } h_i, \lambda_i \text{ 的格式 } R_i. \\ \text{在 } m_i, \cdots, m_i+r_{i+1}-1 \text{ 点用 } h_{i+1}, \lambda_{i+1} \text{ 的格式 } R_i. \\ \text{在 } m_i+r_{i+1} \text{ 以后用 } h_{i+1}, \lambda_{i+1} \text{ 的格式 } R_{i+1}. \end{cases} \tag{4.3}$$

②$r_{i+1}=1, p_i>1, M_{i,i+1}=h_i/h_{i+1}>1$由稀变密.

$$\begin{cases} \text{在 } m_i-p_i \text{ 点用 } h_i, \lambda_i \text{ 的格式 } R_i. \\ \text{在 } m_i-p_i+1, \cdots, m_i \text{ 点用 } h_i, \lambda_i \text{ 的格式 } R_{i+1}. \\ \text{在 } m_i+1 \text{ 以后用 } h_{i+1}, \lambda_{i+1} \text{ 的格式 } R_{i+1}. \end{cases} \tag{4.4}$$

上述格式的使用原则是:

1)若$r_{i+1}=1$,则在联接关系中应用格式R_{i+1}.

2)若$p_i=1$,则在联接关系中应用格式R_i.

3)在交界上m_i均用宽步长的格式.

4)在R_i或R_{i+1}中若有一为耗散,即可保证耦合格式的稳定性.

算例(一)

1)格式

$$
\begin{cases}
R_0R_1: v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda_1(v_{j+1}^n-v_j^n). \quad (j=0,1,\cdots,n_1-1)\\
R_2: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_2(v_{j-1}^n-v_{j-1}^n). \quad (j=n_1+1,\cdots,m_2-1)\\
R_3: v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda_3(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)/2+\lambda_3^2(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n)/2.\\
\qquad (j=m_2+1,\cdots,m_3-1)\\
R_4=R_1, \quad (j=m_3+1,\cdots,m_4-1); \quad R_5=R_2,\\
\qquad (j=m_4+1,\cdots,m_5-1)\\
R_6=R_3. \quad (j=m_5+1,\cdots,m_6+(N-n), m_i=\sum_{j=1}^{i}n_j)
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

2)格式稳定性的分析.

R_0, R_1 为耗散的,应用付氏分析法令 $v_j^n=z^nx^j$ 代入 R_1 得 $\hat{R}_0(z,x)=z-1-\lambda(x-1)$. 当 $x=e^{i\theta}(|x|=1)$时,$|z|^2=|-4\lambda(1-\lambda)\sin^2(\theta/2)$,故当 $\lambda<1$ 时为耗散. $\hat{R}_0(z,1)=z-1\neq0$. $(|z|=1,z\neq1)$. R_2 为酉格式,其特征方程式为 $z^2-2\lambda iz\sin\theta-1=0$. $z=i\lambda\sin\theta\pm(1-\lambda^2\sin^2\theta)^{1/2}$. 当 $\lambda<1$ 时,$|z|=1$,即为酉格式. R_3 为周知的 L-W 耗散格式. $(\lambda_3<1)$. 当采用$(N_1,n_1,\cdots,n_6)=(40,20,10,20,10,20,10)$及 3)的联接关系后,定理 3.13 条件全部满足. 故对于双曲型 $\partial u/\partial t=\partial u/\partial x$ 的外流多层套网格差分格式(4.5)为耦合稳定.

3)$R_i\cap R_{i+1}$联接条件. 当选取上述 N, n_i 时,(4.3),(4.4)均可选用. 例如对于 $R_1\cap R_2$,这时 $r_i=p_{i+1}=1$ 故(4.3),(4.4)均可用. 即

$v_{n_1}^{n+1}=v_{n_1}^n+\lambda_2(v_{n_1+1}^n-v_{r_1}^n)$,或 $v_{n_1}^{n+1}=v_{n_1}^{n-1}+\lambda_2(v_{n_1+1}^n-v_{n_1-2}^n)$.

这里特别说明,如应用格式 R_2,必须用 $v_{n_1-2}^n$代 $v_{n_1-1}^n$. 因为步长为 h_2,及保持格式对称的原故. 其它同理类推,不详述.

4)数据及结果:

N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	$U(x,t)$	$e=\max\lvert U(x_j,t_n)-v_j^n\rvert$
40	20	10	20	10	20	10	$\sin(x+t)$	$9.8278\cdot10^{-2}$
80	40	20	40	20	40	20	$\sin(x+t)$	$5.6018\cdot10^{-2}$
160	80	40	80	40	80	40	$\sin(x+t)$	$2.9646\cdot10^{-2}$

由此可看出误差为 $O(h)$，即 R_1 的精度阶数.

算例(二)

1)格式

$$\begin{cases} R_0: v_0^{n+1}=v_0^n+\lambda_1(v_1^n-v_0^n), \\ R_1: v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda_1(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)/2+\lambda_1^2(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n)/2. \\ R_2: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_2(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n). \\ R_3=R_1, R_4=R_2, R_5=R_1, R_6=R_2. \end{cases} \tag{4.6}$$

这同算例(一)只是次序不同，但由定理 3.13，可知稳定条件也全部满足，故可以更改次序. 详细分析从略.

2)数据及计算结果

N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	$U(x,t)$	$e=\max\lvert U(x_j,t_n)-v_j^n\rvert$
40	20	10	20	10	20	10	$\sin(x+t)$	$1.5875\cdot10^{-3}$
80	40	20	40	20	40	20	$\sin(x+t)$	$3.9926\cdot10^{-4}$
160	80	40	80	40	80	40	$\sin(x+t)$	$9.8142\cdot10^{-5}$

由此可知误差为 $O(h^2)$. 因 R_1, R_2 均为二阶精度. R_0 虽是一阶精度. 根据 B. Gustafsson[15] 可知它不影响整体精度阶数.

算例(三)

1)格式

$$
\begin{cases}
R_0: v_0^{n+1}=[(1-\lambda_1)v_0^{n-1}+2\lambda_1 v_1^n]/(1+\lambda_1). \\
R_1: v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda_1(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)/2+\lambda_1^2(v_{j-1}^n-2v_j^n+v_{j+1}^n)/2. \\
R_2: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_2(v_{j-1}^n-v_{j-1}^n). \\
R_3=R_1, R_4=R_2, R_5=R_1, R_6=R_2.
\end{cases}
\quad (4.7)
$$

2)格式的稳定性分析

R_0 是可解几乎耗散的，其特征方程为 $R_0(z,x)=z^2(1+\lambda_1)-2\lambda_1 zx-(1-\lambda_1)=0$. 当 $x=e^{i\theta}$时，$z=(\lambda_1 e^{i\theta}+A)/(1+\lambda_1)$，$A^2=\lambda_1^2 e^{2i\theta}+(1-\lambda_1^2)$. 但是 $A^4=1-4\lambda_1^2(1-\lambda_1^2)\sin^2(\theta/2)$故 $|A|<1,\theta\neq 0$. 故得 $|z|<1$，即 $|x|=1, x\neq\pm 1\Rightarrow |z|<1$ 为几乎耗散. 其它的稳定分析同例(一). 现从略.

3)数据及计算结果

N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	$U(x,t)$	$e=\max\lvert U(x_j,t_n)-v_j^n\rvert$
40	20	10	20	10	20	10	$\sin(x_j+t_n)$	$1.5875\cdot 10^{-3}$
80	40	20	40	20	40	20	$\sin(x_j+t_n)$	$3.9614\cdot 10^{-4}$
160	80	40	80	40	80	40	$\sin(x_j+t_n)$	$9.8142\cdot 10^{-5}$

由此可见误差为 $O(h^2)$.

算例(四)

1)格式

$$
\begin{cases}
R_0: v_0^{n+1}=v_0^n+\lambda_1(v_1^n-v_0^n). \\
R_1: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_1(v_{j-1}^n-v_{j-1}^n). \quad (j=1,\cdots,n_1-1) \\
R_2: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_2(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)-(v_{j+2}^{n-1}-4v_{j+1}^{n-1}+6v_j^{n-1} \\
\qquad -4v_{j-1}^{n-1}+v_{j-2}^{n-1})/64 \quad (j=n_1+2,\cdots,m_2-2) \\
R_3: v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda_3(v_{j-1}^n-v_{j-1}^n)/2+\lambda_3^2(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n)/2. \\
\qquad (j=m_2+1,\cdots,m_3-1) \\
R_4: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_4(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n). \quad (j=m_3+1,\cdots,m_4-1) \\
R_5=R_3, R_6=R_4.
\end{cases}
\quad (4.8)
$$

2)格式的稳定性分析

R_0 为耗散格式，R_1、R_4 为酉格式. R_2 当 $\lambda_2 \leqslant \sqrt{3}/2$ 时为耗散. 这是因为用 $v_j^n = z^n e^{ij\theta}$ 代入到 R_2 得 $z^2 - 2i\lambda_2(\sin\theta)z - (1-(\sin^4(\theta/2))/4) = 0$，解得 $z = i\lambda_2\sin\theta \pm (1-(\sin^4(\theta/2))/4 - \lambda_2^2\sin^2\theta)^{1/2}$. 故当 $\lambda_2^2 \leqslant 1-(1/4)$ 时，$|z|^2 = 1-(\sin^4(\theta/2))/4$ 即为耗散. 即 $|x|=1, x\neq 1 \Rightarrow |z|<1$. R_3 为 L-W 格式. 因此当采用 3)的联接关系后，定理 3.13 条件满足，故多重套网格差分逼近(4.8)为耦合稳定.

3)$R_i \cap R_{i+1}$ 联接条件. 例如 $R_1 \cap R_2$，此时 $p_1=1, r_2=2$，由密到稀. $(n_1=20, n_2=10)$ 由公式(4.3)得

$$R_1 \cap R_2: \begin{cases} v_{n_1}^{n+1} = v_{n_1}^{n-1} + \lambda_2(v_{n_1+1}^n - v_{n_1-2}^n), \\ v_{n_1+1}^{n+1} = v_{n_1+1}^{n-1} + \lambda_2(v_{n_1+2}^n - v_{n_1}^n). \end{cases}$$

关于第一式必须用 $v_{n_1-2}^n$ 代 $v_{n_1-1}^n$，由于 h_i 的不同，只有如此，才会对称，也就是应用了直接转移的联接关系. 上式也可以用下列式子代替：

$$R_1 \cap R_2 \begin{cases} v_{n_1}^{n+1} = v_{n_1}^{n-1} + \lambda_2(v_{n_1+1}^n - v_{n_1-2}^n), \\ v_{n_1+1}^{n+1} = v_{n_1+1}^{n-1} + \lambda_2(v_{n_1+2}^n - v_{n_1}^n) \\ \quad - (v_{n_1+3}^{n-1} - 4v_{n_1+2}^{n-1} + 6v_{n_1+1}^{n-1} - 4v_{n_1}^{n-1} + v_{n_1-2}^{n-1})/64. \end{cases}$$

也具有应用直接转移关系的效果. 其它的联接关系也同理类推，不详述.

4)数据及计算结果：

N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	$U(x,t)$	$e=\max\lvert U(x_j,t_n)-v_j^n\rvert$
40	20	10	20	10	20	10	e^{-x-t}	$5.5920 \cdot 10^{-4}$
80	40	20	40	20	40	20	e^{-x-t}	$1.4299 \cdot 10^{-4}$
160	80	40	80	40	80	40	e^{-x-t}	$3.6910 \cdot 10^{-5}$

由此可见误差为 $O(h^2)$.

算例(五)

1)格式

$$\begin{cases} R_0: v_0^{n+1} = v_0^n + \lambda_1 (v_1^n - v_0^n). \\ R_1: v_j^{n+1} = v_j^n + \lambda_1 (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)/2 + \lambda_1^2 (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)/2. \\ R_2: v_j^{n+1} = v_j^n + \lambda_2 (v_{j-2}^n - 9v_j^n + 8v_{j-1}^n)/6. \\ R_3 = R_1, R_4 = R_2, R_5 = R_1, R_6 = R_2. \end{cases} \tag{4.9}$$

2)格式的稳定性分析

R_0 为可解耗散格式. (3.54)成立. R_1 为 L-W 耗散格式. $\lambda_1<1$ 为稳定. R_2 当 $\lambda_2<2/3$ 时为耗散. 这用 $v_j^n=z^n e^{ij\theta}$ 代入 R_2 得特征方程式为 $z=1+\lambda_2 . (e^{-2i\theta}-9+8e^{i\theta})/6$ 故得 $|z|^2=1-\lambda_2(1-\cos\theta)(\lambda(16\cos^2\theta+7\cos\theta-41)+6(\cos\theta+5))/9$. 故当 $\lambda<6(\cos\theta+5)/(41-16\cos^2\theta-7\cos\theta)$ 为耗散. 但由函数 $6(x+5)/(41-16x^2-7x)$ 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时在 $x=-1/2$ 的极小为 $2/3$. 故得 $\lambda_2<2/3$ 时 R_2 为耗散. 因此当采用 3)中适当联接关系后,定理 3.13 的条件全部满足,故多重套网格差分格式 $\sum_{i=0}^{6} R_i$(4.9)为耦合稳定.

3)$R_i \cap R_{i+1}$的联接条件:由(4.3)或(4.4)即得.

4)数据及计算结果

N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	$U(x,t)$	$e=\max\lvert U(x_j,t_n)-v_j^n\rvert$
40	20	10	20	10	20	10	$\sin(x+t)$	$2.8792\cdot 10^{-2}$
80	40	20	40	20	40	20	$\sin(x+t)$	$1.5777\cdot 10^{-2}$
160	80	40	80	40	80	40	$\sin(x+t)$	$8.2945\cdot 10^{-3}$

由引可知误差为 $O(h)$,即 R_2 的误差阶数.

算例(六)

1)格式

$$
\begin{cases}
R_0: v_0^{n+1} = v_0^n + \lambda_1 (v_1^n - v_0^n). \\
R_1: v_j^{n+1} = v_j^n + \lambda_1 (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)/2 + \lambda_1^2 (v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)/2. \\
\qquad (j = 1, \cdots, n_1 - 1) \\
R_2: v_j^{n+1} = v_j^n + \lambda_2 (v_{j-2}^n - 9v_j^n + 8v_{j+1}^n)/6. \quad (j = n_1 + 2, \cdots, m_2 - 1) \\
R_3: v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \lambda_3 (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n). \quad (j = m_2 + 1, \cdots, m_3 - 1) \\
R_4 = R_1, R_5 = R_2, R_6 = R_3.
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

2)格式的稳定性分析

R_0 可解耗散,满足公式(3.54),$R_1(\lambda_1<1)$,$R_2(\lambda_2<1/2)$为耗散格式,R_3 为酉格式. 故采用 3)中适当联接关系后,定理 3.13 的条件满足. 故多重套网格差分格式(4.10)是耦合稳定.

3)$R_i \cap R_{i+1}$的联接条件可按(4.3),(4.4)选取.

4)数据及计算结果

N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	$U(x,t)$	$e=\max\lvert\bar{U}(x_j,t_n)-v_j^n\rvert$
40	20	10	20	10	20	10	$\sin(x+t)$	$6.7417\cdot10^{-2}$
80	40	20	40	20	40	20	$\sin(x+t)$	$3.6152\cdot10^{-2}$

由此可见误差为 $O(h)$,即 R_2 的截断误差.

算例(七)

1)格式

$$
\begin{cases}
R_0: v_0^{n+1}=v_0^n+\lambda_1(v_1^n-v_0^n). \\
R_1: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_1(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n). \quad (j=1,\cdots,n_1-1) \\
R_2: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_2(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)-(v_{j+2}^{n-1}-4v_{j+1}^{n-1} \\
\quad +6v_j^{n-1}-4v_{j-1}^{n-1}+v_{j-2}^n)/64. \quad (j=n_1+2,\cdots,m_2-2) \\
R_3: v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda_3(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)/2+\lambda_3^2(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n)/2. \quad (4.11) \\
\qquad (j=m_2+1,\cdots,m_3-1) \\
R_4: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_4(8(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)-v_{j+2}^n+v_{j-2}^n)/6 \\
+\lambda_4^3(v_{j+2}^n-v_{j-2}^n-2(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n))/6. \\
(j=m_3+2,\cdots,m_4+2(N-n))
\end{cases}
$$

2)格式的稳定性分析

R_0 为可解耗散，$R_1(\lambda_1<1)$，$R_2(\lambda_2<\sqrt{3}/2)$，$R_3(\lambda_3<1)$分别为酉格式，耗散格式，耗散格式. 对 R_4 现用 $v_j^n=z^ne^{ij\theta}$代入 R_4，得特征方程式为

$$
\begin{aligned}
z = z^{-1} + \lambda[8(x - x^{-1}) - (x^2 - x^{-2})]/6 \\
+ \lambda^3[x^2 - x^{-2} - 2(x - x^{-1})]/6.
\end{aligned}
$$

当 $x=e^{i\theta}$时得 $z=z^{-1}+2i\lambda(4-\cos\theta)\sin\theta/3+2i\lambda^3(\cos\theta-1)\sin\theta/3$.

令 $b=-2\lambda[(4-\lambda^2)\sin\theta-(1-\lambda^2)\sin\theta\cos\theta]/3$. 现证当 $|\lambda|\leqslant 1$ 时，$|b|\leqslant 2$. $\because |b|\leqslant(2\lambda/3)[(4-\lambda^2)\sin\theta-((1-\lambda^2)/2)\sin 2\theta]$

(当 $\lambda^2\leqslant 1$)$\leqslant(2\lambda/3)[4-\lambda^2+(1-\lambda^2)/2]=\lambda(3-\lambda^2)\leqslant 2$. ($|\lambda|\leqslant 1$)

得 $z^2+ibz-1=0$ 解得 $z=(-ib\pm(4-b^2)^{1/2})/2$ 故当 $\lambda\leqslant 1$ 时 $|z|=1$. 故 R_4 为酉格式. 并采取 3)中的联接条件。

定理 3.13 的条件全部满足，故多重套网格差分逼近 $R_0+R_1+R_2+R_3+R_4$(4.11)为耦合稳定.

3)$R_i\cap R_{i+1}$联接条件

例如对于 $R_1\cap R_2$，由(4.3)得

$$
\begin{cases}
v_{n_1}^{n+1} = v_{n_1}^{n-1} + \lambda_2(v_{n_1+1}^n - v_{n_1-2}^n). \\
v_{n_1+1}^{n+1} = v_{n_1+1}^{n-1} + \lambda_2(v_{n_1+2}^n - v_{n_1}^n).
\end{cases}
$$

注意上述第二式也可用.

$$v_{n_1-1}^{n+1} = v_{n_1-1}^{n-1} + \lambda_2(v_{n_1-2}^{n} - v_{n_1}^{n})$$

$$-(v_{n_1+3}^{n-1} - 4v_{n_1+2}^{n-1} + 6v_{n_1+1}^{n-1} - 4v_{n_1}^{n-1} + v_{n_1-2}^{n-1})/64$$

代替,因为 M=2 为整数倍的原故. 其它的联接关系也同理类推.

4)数据及计算结果

N	n_1	n_2	n_3	n_4	$U(x,t)$	$\max\lvert\bar{U}(x_j,t_n)-v_j^n\rvert$
40	20	10	20	10	$\sin(x+t)$	$8.6207\cdot10^{-4}$
80	40	20	40	20	$\sin(x+t)$	$2.0597\cdot10^{-4}$
160	80	40	80	40	$\sin(x+t)$	$5.0474\cdot10^{-5}$

这表示误差为 $O(h^2)$.

§4.4 $M>1$,M 非整数 $p_i>1$,$r_{i+1}>1$ 及联接技巧.

(1)联接技巧　在本情况下,R_i 或 R_{i-1} 的特征方程式均有多个内根 $|x^{(i)}|\leqslant1$,$|x^{(i-1)}|\leqslant1$. 因此要确定 $(\bar{x}_j^{(i)})^M\neq(x_k^{(i+1)})^{-1}$,或 $(\bar{x}_j^{(i)})^{-1}\neq(x_k^{(i+1)M})$ 的条件是非常复杂的. 而且这时的联接条件用插值形式,因此判定 $\mathrm{Det}J_{i,i+1}\neq0$ 条件更为复杂. 特别是对于两个高次代数方程模为 1 的根,要判定其不相等是很困难的. 但我们可以用下列的联接技巧,绕过这个困难.

联接技巧: 在 R_i 及 R_{i-1} 的联接关系中,设 R_i 及 R_{i+1} 为柯西稳定. $M>1$,M 非整数,同时 $p_i>1$,$r_{i+1}>1$. 因此在区间$[i-1,i]$的末端有 p_i 个 U_i^{n-1} 不能用 R_i 格式决定. 因为它需用到$(i,i+1)$中的点,由于 M 非整数,扩展后,一般找不到其对应点. 若用插值法计算,但判定 $(\bar{x}^{(i)})^M\neq(x_j^{(i-1)})^{-1}$ 或 $(\bar{x}^{(i)})^{-1}\neq(x_j^{(i+1)M})$ 或判定 $\mathrm{Det}J_{i,i+1}\neq0$ 又有困难. 同理在$[i,i+1]$的开始有 r_{i+1} 个 U_i^{n+1} 也同样不能决定. 因此,视这 $p_i+r_{i+1}-1$ 个点为新的区间 $E_{i,i+1}$. $(m_i-p_i+1,\cdots,m_i+r_{i+1}-1)$在其中应用 Lax Wendroff 格式 $Q_{i,i+1}$ 如下:

$$
Q_{i,i+1}\begin{cases}
u_\nu^{n+1} = u_\nu^n + \lambda_i(u_{\nu+1}^n - u_{\nu-1}^n)/2 + \lambda_i^2(u_{\nu+1}^n - 2u_\nu^n + u_{\nu-1}^n)/2. \\
\qquad (\nu = m_i - p_i + 1, \cdots, m_i - 1) \\
u_{m_i}^{n+1} = u_{m_i}^n + \lambda_{i,i+1}(u_{m_i+\alpha}^n - u_{m_i-\beta}^n)/2 \\
\qquad + \lambda_{i,i+1}^2(u_{m_i+\alpha}^n - 2u_{m_i}^n + u_{m_i-\beta}^n)/2. \\
u_\nu^{n+1} = u_\nu^n + \lambda_{i+1}(u_{\nu+1}^n - u_{\nu-1}^n)/2 \\
\qquad + (\lambda_{i+1})^2(u_{\nu+1}^n - 2u_\nu^n + u_{\nu-1}^n)/2. \\
\qquad (\nu = m_i + 1, \cdots, m_i + r_{i+1} - 1)
\end{cases}
\tag{4.12}
$$

并用 $Q_{i,i+1} = Q_{i,i+1}^1 + Q_{i,i+1}^2 + Q_{i,i+1}^3$ 表示，其中

$$
\sigma = n_i, n_{i+1} \text{ 的最大公约数}. \alpha = n_{i+1}/\sigma, \beta = n_i/\sigma, \lambda_{i,i+1} = \sigma/N.
\tag{4.13}
$$

(2)稳定分析　现在 $(i-1, i+1)$ 中有三个格式，即 $R_i, Q_{i,i+1}, R_{i+1}$. 因此 R_i 与 R_{i+1} 的联接耦合问题，分解为下列三个问题：

(1°) R_i, Q_{i+1} 同一步长，不同格式的联接柯西耦合稳定问题.

(2°) $E_{i,i+1}$ 中同一格式 $Q_{i,i+1}$，但不同步长的柯西耦合稳定问题.

(3°) $Q_{i,i+1}, R_{i+1}$ 的联接柯西耦合稳定问题.

若上述三个问题均为纯初值柯西耦合稳定，那么多重套网格差分格式也必为耦合稳定.

(1°) $R_i + Q_{i,i+1}$ 的耦合问题. 由于　1) R_i, Q_{i+1} 分别为柯西稳定格式.　2) $r_{i+1} = 1$，而且 $M_{i,i+1} = h_i/h_{i+1} = 1$.　3) $Q_{i,i+1}$ 为耗散格式. 故由引理 3.18 可知其为耦合稳定.（注：引理 3.18 对于 $M=1$ 也成立.）

(2°) $E_{i,i+1}$ 中同一格式不同步长的耦合柯西稳定问题. 由[2]定理 I ([2]P. 221)可知对于 L-W 耗散格式，在适当的中介面条件，必为耦合稳定. 在(4.12₂)中，$u_{m+\alpha}^n, u_{m-\beta}^n$ 实际是对称点，故已用到这些中介面条件. 故在 $E_{i,i+1}$ 中 $Q_{i,i+1}$ 为耦合柯西稳定.

(3°) $Q_{i,i+1}, R_{i+1}$ 的耦合问题.　1) $Q_{i,i+1}, R_{i+1}$ 分别为柯西稳定.

2) $p_i=1, M_{i,i+1}=1$.　3) $Q_{i,i+1}$为耗散格式. 同理由引理 3.18 可知其为初值问题柯西稳定.(注:引理 3.18 对于 $M=1$ 也成立.)

因此对于 R_i, R_{i+1} 当 M 非整数, $r_{i+1}>1, p_i>1$ 虽然它分别单个为柯西稳定,联合起来,不一定为耦合稳定. 但在其中插入 L-W 格式 $Q_{i,i+1}$ 后变为互相耦合的 $R_i+Q_{i,i+1}+R_{i+1}$ 柯西稳定格式. 这称为稳定的联接技巧.

(3) 算例(八)

1) 格式

$$
\begin{cases}
R_0: v_0^{n+1}=((1-\lambda_1)v_0^{n-1}+2\lambda_1 v_1^n)/(1+\lambda_1). \\
\quad v_1^{n+1}=((1-\lambda_1)v_1^{n-1}+2\lambda_1 v_2^n)/(1+\lambda_1). \\
R_1: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_1(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n)-(v_{j+2}^{n-1}-4v_{j+1}^{n-1} \\
\quad +6v_j^{n-1}-4v_{j-1}^{n-1}+v_{j-2}^{n-1})/64. \quad (j=2,\cdots,n_1-2) \\
R_2: v_j^{n+1}=v_j^n-\lambda_2(8v_{j+1}^n-8v_{j-1}^n-v_{j+2}^n+v_{j-2}^n)/6. \\
\quad (j=n_1+2,\cdots,m_2-2) \\
R_3: v_j^{n+1}=v_j^{n-1}+\lambda_3(8v_{j+1}^n-8v_{j-1}^n-v_{j+2}^n+v_{j-2}^n)/6 \\
\quad +\lambda_3^3(v_{j+2}^n-v_{j-2}^n-2(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n))/6. \\
\quad (j=m_2+2,\cdots,m_3-2) \\
R_3=R_1. (j=m_3+2,\cdots,m_4-2) \quad R_5=R_2. (j=m_4+2,\cdots,m_5-2) \\
R_6=R_3. (j=m_5+2,\cdots,m_6+2(N-n))
\end{cases}
\tag{4.14}
$$

2) 格式的稳定性分析

R_0 为可解耗散. $R_1(\lambda_1\leqslant\sqrt{3}/2)$ 为耗散. R_2, R_3 当 $\lambda_2\leqslant 0.728745, \lambda_3\leqslant 1$ 时为酉格式. 上述格式的联结条件 $R_i\cap R_{i+1}$ 中,均不满足 $r_{i+1}=1$ 或 $p_i=1$. 因为所有格式均有 $r=2, p=2$ 的原故. 若令 $(N,n_1,n_2,r_3,n_4,n_5,n_6)=(40,15,20,25,15,20,25)$ 由此可知 M 均不是整数. 故 $\sum_{i=0}^{6}R_i$(4.14) 一般不是多重套网格耦合稳定格

式.

3)联接技巧的应用

现应用公式(4.12)在 R_i,R_{i+1} 中插入 $Q_{i,i+1}$，得到多重套网格差分格式：

$$R_0,R_1,Q_{1,2},R_2,Q_{2,3},R_3,Q_{3,4},R_4,Q_{4,5},R_5,Q_{5,6},R_6. \quad (4.15)$$

由上述分析可知

1)$Q_{i,i+1}$分别为$(i=1,\cdots,5)$纯初值问题柯西稳定.

2)$R_i(i=1,\cdots 6)$分别为柯西稳定格式.

3)$R_1\cap Q_{1,2},Q_{1,2}\cap R_2,R_2\cap Q_{2,3},Q_{2,3}\cap R_3,R_3\cap Q_{3,4},Q_{3,4}\cap R_4,R_4\cap Q_{4,5},Q_{4,5}\cap R_5,R_5\cap Q_{5,6},Q_{5,6}\cap R_6$ 均为耦合柯西稳定.

4)$Q_{i,i+1}(i=1,\cdots,5)$为耗散格式.

5)R_0 为可解耗散格式并满足(3.54).

因此由引理 3.18,引理 3.5,定理 3.1,定理 3.2 可知(4.15)多重套网格差分格式为耦合稳定.

4)数据及计算结果

N	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	U(x,t)	$\max\lvert u(x_j,t_n)-v_j^n\rvert$
40	15	20	25	15	20	25	$\sin(x+t)$	$2.8162\cdot10^{-3}$
80	30	40	50	30	40	50	$\sin(x+t)$	$7.0708\cdot10^{-4}$
160	60	80	100	60	80	100	$\sin(x+t)$	$1.7677\cdot10^{-4}$

这表示误差为 $O(h^2)$.

§4.5 $M>1$,M 为不可解通约的非整数,$p_i>1$,$r_{i+1}>1$ 全能联接格式.

前节方法尚有一个缺点,即当 M 为不可通约的非整数,(或为无理数)即(4.13)中 n_i,n_{i+1}为互质即除 1 外没有最大公约数时,这时(4.12)的第二式的步长只好取为整个区间,那么误差就很大了.

故设法寻求一个比 L W 格式更好的差分格式作为 $Q_{i,i+1}$，使 R_i，$Q_{i,i+1}$，R_{i+1} 耦合稳定. 并且对于任意分别柯西稳定的 R_i，R_{i+1} 不论 M 是否整数，是否可通约，而且 $p_i>1$，$r_{i+1}>1$ 均可相互耦合稳定. 这称为具有全能的耦合稳定性质. 这个格式就是耗散的向前尤拉格式：

$$
Q_{i,i+1}\begin{cases} u_\nu^{n+1} = u_\nu^n + \lambda_i(u_{\nu+1}^n - u_\nu^n), \\ \qquad (\nu = m_i - p_i - 1, \cdots, m_i - 1) \\ u_\nu^{n+1} = u_\nu^n + \lambda_{i+1}(u_{\nu+1}^n - u_\nu^n). \\ \qquad (\nu = m_i, \cdots, m_i + r_{i+1} - 1) \end{cases} \tag{4.16}
$$

上述两式分别用 $Q_{i,i+1}^{(1)}$，$Q_{i,i+1}^{(2)}$ 表示.

全能联接格式 $Q_{i,i+1}$ 耦合稳定性质的分析.

由于在 $[i-1,i][i,i+1]$ 中有三个格式，R_i，$Q_{i,i+1}$，R_{i+1} 其中 $Q_{i,i+1}$ 为 R_i，R_{i+1} 的联结条件. 故 R_i，R_{i+1} 的耦合问题可分为三个问题：

(1) R_i，$Q_{i,i+1}^{(1)}$ 的耦合稳定性. 由于 R_i 为柯西稳定格式，而 $Q_{i,i+1}^{(1)}$ 为耗散格式，$M=1$，$r_{i+1}=0$，而且均为不超过三层的格式，故引理 3.14，引理 3.18 的条件满足，故 R_i，$Q_{i,i+1}^{(1)}$ 为耦合柯西稳定.

(2) $E_{i,i+1}$ 中耗散格式的耦合稳定. 这因 $Q_{i,i+1}^{(1)}$，$Q_{i,i+1}^{(2)}$ 均为耗散格式，$M>1$，$r_{i+1}=0$，$p_i=1$ 由于 $Q_{i,i+1}^{(2)}$ 是自开始格式，可接在任何稳定的格式之后，由于引理 3.18 条件满足，故 $Q_{i,i+1}^{(1)}$，$Q_{i,i+1}^{(2)}$ 为耦合柯西稳定.

(3) $Q_{i,i+1}^{(2)}$ R_{i+1} 的耦合稳定性质. 同(1)相似，$M=1$，$P_i=1$，$Q_{i,i+1}^{(2)}$ 为耗散不超过三层格式，由引理 3.18 可知 $Q_{i,i+1}^{(2)}$，R_{i+1} 为耦合柯西稳定.

全能稳定的联接格式(4.16)，(注：这指对于固定微分方程(4.1)而言，即若(4.1)改变，当然(4.16)也相应改变.)由于 $Q_{i,i+1}^{(1)}$

及 $Q_{i,i+1}^{(2)}$ 均为单边自开始格式. 因 $Q_{i,i+1}^{(1)}$ 有 $r_{i+1}=0$,它可以接在任意格式 R_i 之后. 又 $Q_{i,i+1}^{(2)}$ 是自开始的. $p_i=1$,故任意稳定格式 R_{i+1} 可接在其后. 正因为它是单边格式,因此在两个区间交界点应用此格式时,不存在一个格式跨过两个区间的耦合问题. 因此不论两区间的网格比 M 是否整数,可约与否,这些格式均可应用具有这种性质的格式来联接,故(4.16)称为全能的耦合稳定格式. 这种方法称为**陈氏全能耦合稳定联接方法**.

算例(九)

(1)格式

$$
\begin{cases}
R_0,R_1: \quad u_j^{n+1}=u_j^n+\lambda_1(4u_{j+1}^n-3u_j^n-u_{j+2}^n)/2 \\
\qquad +\lambda_1^2(u_{j+2}^n-2u_{j+1}^n+u_j^n)/2. \quad (j=0,1,\cdots,n_1-2) \\
R_2: \quad u_j^{n+1}=u_j^{n-1}+\lambda_2(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)-(u_{j-2}^{n-1}-4u_{j+1}^{n-1} \\
\qquad +6u_j^{n-1}-4u_{j-1}^{n-1}+u_{j-2}^{n-1})/64. \quad (j=m_1+2,\cdots,m_2-2) \\
R_3: \quad u_j^{n+1}=u_j^{n-1}+\lambda_3(8(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n) \\
\qquad -(u_{j+2}^n-u_{j-2}^n))/6. \quad (j=m_2+2,\cdots,m_3-2) \\
R_4: \quad u_j^{n+1}=u_j^{n-1}+\lambda_4(8(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)-(u_{j+2}^n-u_{j-2}^n))/6 \\
\qquad +\lambda_4^3(u_{j+2}^n-u_{j-2}^n-2(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n))/6. \quad (j=m_3+2,\cdots,m_4+2(N-n))
\end{cases}
\tag{4.17}
$$

(2)格式(4.17)的稳定分析

现根据[8][9]判别法应用付氏分析法计算 R_0,R_1 的特征方程式为 $z=1-4\lambda_1(1-\lambda_1^2)(2-\lambda_1)\sin^2(\theta/2)$. 故($\lambda_1<1$)知 R_1 为耗散自开始的格式. R_2 当 $\lambda_2\leqslant\sqrt{3}/2$ 时为耗散格式. R_3 当 $\lambda_3\leqslant 0.728745$ 时为酉格式. R_4 当 $\lambda_4\leqslant 1$ 时也为酉格式. 这些格式均有 $p=r=2$. 因此 $\sum_{i=1}^{4}R_i$ 不是多重套网格耦合稳定格式.

(3)全能耦合稳定格式(4.16)的引入. 现在 $R_i, R_{i+1}(i=1,2,3)$中插入格式(4.16)使(4.17)变为

$$R_0 + R_1 + Q_{1,2} + R_2 + Q_{2,3} + R_3 + Q_{3,4} + R_4. \quad (4.18)$$

故得

1) (4.18)中相邻格式中至少有一为耗散,并具有 $r_{i+1}=0$,或 $p_i=1$.

2) $R_i(i=1,2,3,4)Q_{i,i+1}(i=1,2,3)$分别对于柯西问题相容稳定.

3) 相邻区间网格比 $M>1$ 为非整数,或不可通约的分数.

4) (4.18)相邻格式至少有一为耗散,至少有一不超过三层.

5) R_0 可解耗散.

6) $R_0(z,1)=(z-1-\lambda(4x-3-x^2)/2-\lambda^2(x^2-2x+1)/2)|_{x=1}=z-1\neq 0.\ (|z|=1, z\neq 1)$.

故定理 3.13 的条件满足,可知(4.18)为多重套网格耦合稳定的差分格式.

(4)数值计算结果.

对于方程(4.1)初值为 $u(x,0)=\sin x$. 应用差分逼近(4.17)及(4.18)得

N	n_1	n_2	n_3	n_4	$U(x,t)$	$\max\lvert u(x_j,t_n)-u_j^n\rvert$
40	13	19	15	17	$\sin(x+t)$	$3.7709\cdot 10^{-3}$
80	26	38	30	34	$\sin(x+t)$	$9.4771\cdot 10^{-4}$
160	52	76	60	68	$\sin(x+t)$	$2.3618\cdot 10^{-4}$

这表示误差为 $O(h^2)$.

§5 双曲型方程双边值问题多重套网格差分方程的稳定性判别方法

§5.1引言 关于双曲型方程初边值问题多重套网格有限差分法的稳定性问题的研究,已见李欣恺、陈传淡等最近的工作[11]-[14],[18]-[21].现把此种思想推广到双曲型方程的双边值问题上去,并得到一些简便的稳定性判别方法,最后还附一个双边值问题多重套网格差分方法耦合稳定的计算实例.

对于双曲型偏微分方程双边值问题的差分逼近的模型问题

$$\partial u/\partial t = \partial u/\partial x, u(x,0) = f(x), u(1,t) = \varphi(t),$$
$$(0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t < \infty) \quad (5.1)$$

在$(0\leqslant x\leqslant 1)$中双边值问题差分逼近,一般给出如下:在$x=0$附近差分格式设为$A_0$,在区间中基本差分格式设为$A_1$,在$x=1$边界的差分格式,设为$A_2$.合书为如下形式:

$$A_0 + A_1 + A_2. \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, t \geqslant 0) \quad (5.2)$$

关于这些格式的稳定性判别法为:(参看[5]P. 660—P. 661的定理5.4或第二章定理2.6)

引理5.1 考虑在$(0\leqslant x\leqslant 1, t\geqslant 0)$中的双边值问题的差分逼近(5.2).若 1)对于四分之一平面左单边值问题$A_0, A_1 (0\leqslant x<\infty)$为稳定. 2)对于四分之一右单边值问题$A_1, A_2(-\infty<x\leqslant 1)$为稳定,则双边值问题(5.2)也为稳定.

双曲型方程双边值问题多重套网格差分逼近式

设在$[0,1]$中分为n个小区间,$[0,a_1]$,$[a_1,a_2]\cdots[a_{n-1},1]$,第i区间中的网格函数用$u_v^{(i)}(t)$表示.

设初始格式为

$$R_0: T_{-1}u_\nu^{(1)}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}T_\sigma u_\nu^{(1)}(t-\sigma k),$$

$$T_\sigma=\sum_{j=0}^{m}C_{j\sigma}E^j. \quad (\nu=0,\cdots,r_1-1) \tag{5.3}$$

而在$[i-1,i]$中的基本内点格式为：

$$R_i: Q_{-1}^{(i)}u_\nu^{(i)}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}Q_\sigma^{(i)}u_\nu^{(i)}(t-\sigma k),$$

$$Q_\sigma^{(i)}=\sum_{j=-r_i}^{p_i}A_{j\sigma}^{(i)}E^j, \quad (i=1,\cdots,n). \tag{5.4}$$

$$(i=1,\nu=r_1,\cdots,N_1-p_1;i=2,\nu=N_1+r_2,\cdots,$$

$$m_2-p_2,\cdots,m_i=\sum_{j=1}^{i}n_j)$$

以及 R_i,R_{i+1}中的联接关系 $R_i\cap R_{i+1}(i=1,\cdots,n-1)$. 设右边值条件为：

$$R_{n+1}: T_{-1}u_\nu^{(n)}(t+k)=\sum_{\sigma=0}^{s}T_\sigma u_\nu^{(n)}(t-\sigma k),$$

$$T_\sigma=\sum_{j=0}^{m}C_{j\sigma}E^j. \quad (\nu=m_i-p_i+1,\cdots,m_i) \tag{5.5}$$

(5.3),(5.4),(5.5)联合书为形式：

$$R_0+R_1+\cdots+R_\nu+\cdots+R_n+R_{n+1}, R_i\cap R_{i+1}.$$

$$(i=1,\cdots,n-1) \tag{5.6}$$

现在讨论如何应用上述引理 5.1 求(5.6)的耦合稳定条件. 为此，先述关于单边值问题多重套网格方法的稳定性判别条件.

引理 5.2 （参看[11]中定理 2.1 或本章§2 定理 2.3)单边值问题二重套网格差分方法 $R_0+R_1+R_2$：若问题 A：初边值问题差分方法 R_0+R_1 为 G. K. S. 稳定. 问题 B：纯初值问题差分方法 R_1+R_2 为耦合稳定. 则二重套网格差分方法 $R_0+R_1+R_2$ 也是耦合 G. K. S. 稳定.

引理 5.3 （参看[14]中定理，[1] 定理 2.2，或本章 §3 定理 3.2） 双曲型方程单边值问题 n 重套网格差分格式 MND: $\sum R_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$，$R_i\cap R_{i-1}$ 为耦合 G.K.S. 稳定判别条件的代数形式为：

$$\mathrm{Det}J_{i-1,i}\neq 0, \quad (|z|\geq 1, i=1,2,\cdots,n) \tag{5.7}$$

上述引理中 $J_{i-1,i}$ 是 R_{i-1} 的反射 $\bar{R}_{i-1}$ 的内根.（即 R_{i-1} 外根的倒数，理由见后）同 R_i 的内根的线性组合，组合系数为 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2\cdots)$ 代入 $R_{i-1}\cap R_i$ 后所得到的线性方程组 $J_{i-1,i}\sigma=0$ 的系数所组成的矩阵. 特别是 J_{01} 为 R_1 的特征方程式 $\hat{R}_1(x,z)=0(|z|\geq 1)$ 的内根的线性组合代入边界条件 R_0 所得线性方程组 $J_{01}\sigma=0$ 的系数矩阵. 而 $J_{n,n+1}$ 的意义如下. 先把右单边值问题 R_n+R_{n+1} 经过反射后变为左单边值问题 $\bar{R}_{n+1}+\bar{R}_n$. 把 $\bar{R}_n$ 的特征方程的内根的线性组合，也就是 R_n 的外根的倒数的线性组合，代入边界条件 $\bar{R}_{n+1}$ 所得的线性方程组 $J_{n,n+1}\sigma=0$ 的系数矩阵就是 $J_{n,n+1}$.

由于 R_i 的特征方程为

$$p_i(z,x)=\sum_{j=-r_i}^{p_i}(A_{j-1}^{(i)}-\sum_{\sigma=0}^{s}A_{j\sigma}^{(i)}z^{-\sigma-1})x^j. \quad (i=1,\cdots,n) \tag{5.8}$$

故其反射后的特征方程式为（即把 x 改为 x^{-1}）

$$\bar{p}_i(z,x)=\sum_{j=-r_i}^{p_i}(A_{j-1}^{(i)}-\sum_{\sigma=0}^{s}A_{j\sigma}^{(i)}z^{-\sigma-1})x^{-j}$$

$$=\sum_{j=-p_i}^{r_i}(A_{-j-1}^{(i)}-\sum_{\sigma}A_{-j\sigma}^{(i)}z^{-\sigma-1})x^j,$$

令 $A_{-j\sigma}^{(i)}=\bar{A}_{j\sigma}^{(i)}$ 得

$$\bar{p}_i(z,x)=\sum_{j=-p_i}^{r_i}(\bar{A}_{j-1}^{(i)}-\sum_{\sigma=0}^{s}\bar{A}_{j\sigma}^{(i)}z^{-\sigma-1})x^j=p(z,x^{-1}). \tag{5.9}$$

由此可知 $\overline{R}_i$ 的内根为 R_i 外根的倒数.

引理 5.4 （参看[14]中引理 2 或[11]中定理 4.1 或本章 § 3 引理 3.5）

差分格式 $R_i+R_{i+1}, R_i \cap R_{i+1}$ 相耦合稳定的充要条件为

$$\mathrm{Det}J_{i,i+1}(z) \neq 0, \quad (|z| \geqslant 1) \tag{5.10}$$

其中 $J_{i,i+1}$ 的意义同前.

§ 5.2 双边值问题多重差分逼近的稳定性判别方法(一)

对于格式(5.6)现根据引理 5.1，引理 5.2，用不同的方法来处理这个问题，其方法之一为把(5.6)分解为如下的三个格式集合：

$$\begin{cases} (1) R_0+R_1+\cdots+R_{\omega-1} \text{视为左边界条件 } A_0. \\ (2) R_\omega \text{ 视为内点基本格式 } A_1. \\ (3) R_{\omega+1}+\cdots+R_{n+1} \text{视为右边界条件 } A_2. \end{cases} \tag{5.11}$$

那么由引理 5.1 可知若

$$\begin{cases} (1) \text{ 左初边值问题 } A_0A_1 \text{ 为稳定.} (0 \leqslant x < \infty) \\ (2) \text{ 右初边值问题 } A_1A_2 \text{ 为稳定.} (-\infty < x \leqslant 1) \end{cases} \tag{5.12}$$

则双边值问题 $A_0A_1A_2$ 也为稳定.

再由引理 5.3 可知当

$$\mathrm{Det}J_{i-1,i}(z) \neq 0. \quad (|z| \geqslant 1, i = 1,2,\cdots,\omega) \tag{5.13}$$

则左初边值问题 A_0A_1 为 G. K. S. 稳定.

对于右初边值问题 A_1A_2 的 G. K. S. 稳定性判别条件，有如下的定理：

定理 5.1 若

$$\mathrm{Det}J_{i-1,i}(z) \neq 0. (|z| \geqslant 1, i = \omega+1,\cdots,n+1) \tag{5.14}$$

则右初边值问题

$$R_{\omega+1} + R_{\omega+2} + \cdots + R_n + R_{n+1}, R_i \cap R_{i+1} \tag{5.15}$$
$$(i = \omega+1,\cdots,n, -\infty < x \leqslant 1)$$

为 G. K. S. 稳定.

证 现用数学归纳法证明上述结果：

(1)先证 $\omega=n-2$ 时，定理 5.1 成立. 这时(5.15)为

$$R_{n-1}+R_n+R_{n+1},R_{n-1}\cap R_n,R_n\cap R_{n+1}.\ (-\infty<x\leqslant 1) \tag{5.16}$$

再由反射变换，把上式变为

$$\bar{R}_{n+1}+\bar{R}_n+\bar{R}_{n-1}.\quad (1\leqslant x<\infty)$$

由引理 5.2，引理 5.3 可知这是二重套网格差分格式. 其稳定性判别条件为：

$$\mathrm{Det}J_{n,n+1}\neq 0,\mathrm{Det}J_{n-1,n}\neq 0.\quad (|z|\geqslant 1)$$

故由引理 5.2，引理 5.3 可知定理 5.1 对于 $\omega=n-2$ 为成立的.

(2)其次设 $\omega=k$ 时，定理 5.1 成立. 即若

$$\mathrm{Det}J_{i-1,i}\neq 0,\quad (i=k+1,\cdots,n+1,|z|\geqslant 1)$$

则

$$R_k+R_{k+1}+\cdots+R_{n+1},R_i\cap R_{i+1}\quad (i=k,\cdots,n)$$

为右单边值问题 G.K.S. 稳定.

(3)现证当 $\omega=k-1$ 时定理 5.1 也成立.

证 由于右单边值问题 $R_{k-1}+R_k+\cdots+R_{n+1}$ 反射后变为左单边值问题：

$$\bar{R}_{n+1}+\bar{R}_n+\cdots+\bar{R}_{k-1}. \tag{5.17}$$

根据[11]及[14]的结果(或参看本章§3 定理 3.1)，其稳定性判别法可分解为

问题 A　$\bar{R}_{n+1}+\cdots+\bar{R}_{k+1}+\bar{R}_k$ 的初边值问题的稳定性. 即把 $\bar{R}_{n+1}+\cdots+\bar{R}_{k+1}\equiv R'$ 视为 $\bar{R}_k$ 的边界条件，这时问题 A 即为 $R'+\bar{R}_k$ 的稳定性问题.

问题 B　$\bar{R}_k+\bar{R}_{k-1}$ 的耦合纯初值问题的稳定性.

但由(2)可知问题 A 的稳定性判别条件为

$$\mathrm{Det}J_{i-1,i}\neq 0.\quad (i=k+1,\cdots,n+1) \tag{5.18}$$

这时 $\bar{R}_{n+1}+\cdots+\bar{R}_k, \bar{R}_i\cap\bar{R}_{i+1}$ $(i=k,\cdots,n)$ 为初边值问题 G.K.S. 稳定. 其次对于问题 B 其稳定条件由引理 5.4 可知当

$$\mathrm{Det}J_{k-1,k}\neq 0 \quad (|z|\geqslant 1) \tag{5.19}$$

时 $\bar{R}_k+\bar{R}_{k-1}, \bar{R}_k\cap\bar{R}_{k-1}$ 为纯初值问题柯西稳定. 联合(5.18),(5.19)即(5.14)成立时,(5.17)为左单边值问题 G.K.S. 稳定. 再反射回来,即得(5.15)为右单边值问题多重套网格方法 G.K.S. 稳定. 故 $\omega=k-1$ 时定理 5.1 也成立. 定理 5.1 证毕.

注: 如果 R_{n+1} 取为边界条件 $u(1,t_n)=\varphi(t_n)$,因此它的齐次简化问题边界条件的特征方程式为 $\hat{R}_{n+1}=z^{n+1}x^j=0$. 由于 $|z|\geqslant 1$ 故 $\hat{R}_{n+1}=0$ 时只有零内根 $x=0$. 但 $\bar{R}_n$ 由假定 $A_{-r}^{(n)}, A_p^{(n)}$ 非奇,不存在零内根,即 R_n 的外根 $\bar{x}$ 的倒数有界. 把它代入边界条件 $\hat{R}_{n+1}=z^{n-1}(\bar{x})^N\neq 0$,由[5] H. O. Kreiss 判别初边值稳定性定理可知 R_n+R_{n-1} 时常为 G.K.S. 稳定的. 换言之,右边值问题当边界条件取为 $u_N^{n+1}=u(1,t_{n+1})$ 时常为稳定. 事实上,外流微分方程经过反射变为内流方程式. 我们已知,对于初边值问题内流方程式时常为稳定的原故.(参看[8]中引理 2.3)

由公式(5.13),(5.14)及引理 5.1 得

定理 5.2 关于双边值问题 5.1 的多重套网格差分方法(5.6)耦合稳定的代数条件为

$$\mathrm{Det}J_{i-1,i}(z)\neq 0. \quad (i=1,\cdots,n+1, |z|\geqslant 1) \tag{5.20}$$

§5.3 方法(二) 在定理 5.1,5.2 的证明中,双边值问题多重套网格差分方法的稳定性,是否对于 A_0, A_1, A_2 的选取有关系,是否对于 A_0, A_1, A_2 的某种选取方法而出现不稳定的情况呢?或出现了不同的稳定条件呢? 问题的答案是不会的. 现用方法(二)说明此问题. 由引理 5.1 及引理 5.2,则双边问题多重套网格差分逼近(5.6)也可分解为如下的形式:

$$\begin{cases} R_0 \text{ 为左边界条件 } A_0, \\ R_1 + \cdots + R_n \text{ 为内点格式 } A_1, \\ R_{n+1} \text{为右边界条件 } A_2. \end{cases} \tag{5.21}$$

注意：公式(5.11)及公式(5.21)代表了各种分解方法的极端情形，由证明过程可知，它包括了一切的分解方法.故(5.6)的耦合稳定问题由引理5.1化为

$$\begin{cases} (1)\text{问题 A}: A_0 + A_1 \text{ 左初边问题稳定性}. \\ (2)\text{问题 B}: A_1 + A_2 \text{ 右初边值问题稳定性}. \end{cases} \tag{5.22}$$

①问题 A：$A_0 + A_1$ 左初边值问题的稳定分析，由引理5.3其稳定性判别条件为：

$$\mathrm{Det}J_{i-1,i}(z) \neq 0. \quad (i = 1, 2, \cdots, n, |z| \geqslant 1) \tag{5.23}$$

②问题 B：$A_1 + A_2$ 右初边值问题的稳定分析，首先我们用折叠方法把它转化为左初边值问题

$$\bar{R}_{n+1} + \bar{R}_n + \cdots + \bar{R}_1. \quad (1 \leqslant x < \infty) \tag{5.24}$$

由引理5.3可知其稳定条件为 $\bar{R}_i, +\bar{R}_{i-1}, \bar{R}_i \cap \bar{R}_{i-1} (i = 2, \cdots, n+1)$的耦合稳定条件.即把 R_i 的内根及 R_{i-1}的外根的倒数代入 $\bar{R}_i \cap \bar{R}_{i-1}$ 即得：

$$\mathrm{Det}J_{i-1,i} \neq 0. \quad (i = 2, \cdots, n+1) \tag{5.25}$$

当它满足时，由引理5.3可知左初边值问题为稳定的.经过反射后得

$$A_1 + A_2 = R_1 + R_2 + \cdots + R_{n+1}.$$

它为右初边值问题稳定，把条件(5.25)，(5.23)联合起来即得(5.20).由引理5.1可知双边值问题套网格方法差分逼近(5.6)为稳定.

这便是定理5.2的另一证明.由相同的条件(5.20)得到相同的结果，由证明的步骤中可看到，同分解的方式(5.11)，(5.21)无关，只是方法不同而已.

§5.4 简便的稳定性判别法

双边值问题多重套网格差分逼近方法(5.6)的稳定性判别法(5.20).应用起来是比较不方便.首先要解代数方程组,求出 R_i 内根及 R_{i-1} 外根的倒数.它的线性组合系数为 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)$,再代入 $R_{i-1}\cap R_i$ 得到 $J_{i-1,i}\sigma=0$.还要寻求判别 $\mathrm{Det}J_{i-1,i}\neq 0$ 的条件,其中均为烦杂的代数运算.现应用下列引理,可以把判别方法大大简化.

引理 5.5 (参看[14]中引理 5($M=1$)及引理 8($M>1$)及[11]中推论 4.1 或本章§3 引理 3.18)设

1)R_i,R_{i+1} 分别为柯西相容稳定.

2)R_i,R_{i+1} 至少有一为耗散.

3)$M>1$ 为整数及 $p_i=1$ 或 $r_{i+1}=1$ 或零.

4)R_i 或 R_{i+1} 至少有一不超过三层.

则 $R_i+R_{i+1},R_i\cap R_{i-1}$ 为耦合纯初值问题柯西稳定.

注: 当 $M=1$ 时,情形更简单,上述定理仍成立.

引理 5.6 (参看[8]中定理 3.1—3.4,或参看第三章定理 1.2 至 1.5) 外流微分方程式(5.1)的差分逼近 R_0+R_1 若满足下列 4 组条件之一者,则为初边值问题 R_0+R_1 稳定.

1)若①基本格式 R_1 为两层耗散. ②边界条件 R_0 的特征方程式满足 $\hat{R}_0(z,x)\neq 0.$ ($|z|\geq 1,0<|x|<1$)

2)若①R_1 为耗散. ②R_0 特征方程满足 $\hat{R}_0(z,x)\neq 0.$ ($|z|\geq 1,0<|x|<1$) ③$\hat{R}_0(z,1)\neq 0.$ ($|z|=1,z\neq 1$)

3)若①R_1 为耗散. ②$\hat{R}_0(z,1)\neq 0.$ ($|z|=1,z\neq 1$) ③R_0 可解耗散满足 V-N 条件.

4)若①R_1 为耗散或酉格式. ②$\hat{R}_0(z,1)\neq 0.$ ($|z|=1,z\neq 1$) ③R_0 可解耗散.

定理 5.3 若

①R_i,R_{i+1}分别对于柯西问题耦合稳定.

②$p_i=1$,或 $r_{i-1}=1$.

③$M>1$ 为整数,$p_i=1$,或 $r_{i+1}=1$ 或 $r_{i+1}=0$.

④R_{i-1}或R_i至少有一为耗散及至少有一不超过三层.(以上条件是满足引理 5.5 的条件)

⑤R_0+R_1,R_n+R_{n+1}分别为左及右初边值问题稳定.(即满足引理 5.6 的 4 组条件之一者)

则双边值问题多重套网格差分逼近(5.6)为耦合稳定.

证 由引理 5.5 及引理 5.6 及定理 5.2 即得.

§ 5.5 $M>1$,M 非整数,p_i 或 r_{i+1}均不为 1 的情形下 R_i+R_{i+1}的全能联接技巧

在上述情形下,引理 5.5,引理 5.6,定理 5.3 均不能用.这时联接条件非常复杂,因为它不能应用直接转移的联接关系.任何一区间的网格点扩展到另一区间中均没有其对应点,只能用线性插值方法.因此判定 $\mathrm{Det}J_{i-1,i}\neq 0$ 的条件是很复杂的.我们采取下列方法绕过这个困难.其主要原因在于不能应用直接转移的联接关系.因 $p_i>1$ 故在$[i-1,i]$区间的末端,有 p_i 点不能应用 R_i 格式.因为 R_i 方程的网格点会超出$[i-1,i]$之外.由于 $M>1$ 非整数,而下一区间$[i,i+1]$又没有扩展后的对应点.同理,在区间$[i,i+1]$中的开头 r_{i+1}点不能应用 R_{i+1}格式.因为这时有些网格点会超出该区间之外.由于 $M>1$ 非整数,故上一区间没有它扩展后的对应点.

因此,我们把这些 $r_{i+1}+p_i-1$ 点作为新的区间 $E_{i,i+1}$,在其中应用全能的耗散向前欧拉格式 $Q_{i,i+1}$:

$$Q_{i,i+1}\begin{cases}v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda_i(v_{j+1}^n-v_j^n), & (j=m_i-p_i+1,\cdots,m_i-1)\\ v_j^{n+1}=v_j^n+\lambda_{i+1}(v_{j-1}^n-v_j^n). & (j=m_i,\cdots,m_i+r_{i+1}-1)\end{cases}\tag{5.26}$$

因此在$[i-1,i+1]$中有三个格式，即 $R_i, Q_{i,i+1}, R_{i+1}$. 现证明插入后为耦合柯西稳定.

①关于 $R_i, Q_{i,i+1}$的耦合稳定.　　由于 R_i 柯西稳定，Q_i 为耗散格式，$M=1, r_{i+1}=0, R_i, Q_{i,i+1}$中至少有一为耗散，格式均不超过三层，由引理 5.5 可知除了 $M>1$ 外所有条件完全满足. 但 $M=1$ 即步长不变，这时可知引理 5.5 也成立. 故 $R_i, Q_{i,i+1}$为耦合柯西稳定.

②$Q_{i,i+1}$中两式的耦合柯西稳定性.　　这时 $M>1, p_i=1$, $r_{i+1}=0$. $Q_{i,i+1}^{(2)}$为自开始格式，两个都是耗散，不超过三层，再一次用引理 5.5，可知 $Q_{i,i+1}$中两个格式为耦合柯西稳定.

③$Q_{i,i+1}, R_{i+1}$的耦合柯西稳定性.　　这时 $M=1, p_i=1$, $Q_{i,i+1}, R_{i+1}$中至少有一为耗散，至少有一不超过三层. 故应用引理 5.5 可知其为耦合稳定.

$Q_{i,i+1}$的全能联接性质

$Q_{i,i+1}$(5.26)为耗散及 $p_i=1$，故能够同任意柯西稳定的格式 R_i 相联接. 它又是耗散自开始格式，而且 $r_{i+1}=0$，故可以把任意柯西稳定格式 R_{i+1}接在其后. 具有此种性质的 $Q_{i,i+1}$称为全能的联接格式. 故在 R_i, R_{i+1}之中插入 $Q_{i,i+1}$(5.26)，后应用引理 5.5，引理 5.6，定理 5.3 可判定多重套网格双边值问题是耦合稳定. 这称为**陈氏全能耦合稳定的联接方法**.

§5.6　数值计算例子

1)问题的提出. 现求下列双曲型问题的解：

$$\begin{cases} \partial u/\partial t = \partial u/\partial x, & (0 \leqslant x \leqslant 4, t \geqslant 0) \\ u(x,0) = \sin x, & (0 \leqslant x \leqslant 4). \\ u(4,t) = \sin(4+t), & (t \geqslant 0) \end{cases} \tag{5.27}$$

已知其真解为 $u(x,t)=\sin(x+t)$. 故可以作为检查下列差分格式的正确性的例子.

2)应用格式：设在(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)中的网格点个数各为$(n_1,n_2,n_3,n_4)=(10,20,5,15)$. 步长为$1/n_1,1/n_2,1/n_3,1/n_4$. 时间步数为$n=20$，步长为$1/n$. $\lambda_i=n_i/n$，$m_i=\sum\limits_{j=1}^{i}n_j$，在各区间中用下列格式：

$$R_0: u_j^{n+1}=u_j^n+\lambda_1(u_{j-1}^n-u_j^n).\quad (j=0,1) \tag{5.28}$$

$$R_1: u_j^{n+1}=u_j^{n-1}+\lambda_1(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)-(u_{j+2}^{n-1}-4u_{j+1}^{n-1}+6u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n)/64 \quad (j=2,\cdots,n_1-2) \tag{5.29}$$

$$R_{1,2}:\begin{cases} u_{n_1-1}^{n+1}=u_{n_1-1}^{n-1}+\lambda_1(u_{n_1}^n-u_{n_1-2}^n)-(u_{n_1+2}^{n-1}-4u_{n_1}^{n-1} \\ \qquad +6u_{n_1-1}^{n-1}-4u_{n_1-2}^{n-1}+u_{n_1-3}^{n-1})/64. \\ u_{n_1}^{n+1}=u_{n_1}^{n-1}+\lambda_1(u_{n_1+2}^n-u_{n_1-1}^n)-(u_{n_1+4}^{n-1}-4u_{n_1+2}^{n-1} \\ \qquad +6u_{n_1}^{n-1}-4u_{n_1-1}^{n-1}+6u_{n_1-2}^{n-1})/64. \end{cases} \tag{5.30}$$

$$R_2: u_j^{n+1}=u_j^{n-1}+\lambda_2(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n).\quad (j=n_1+1,\cdots,m_2-1) \tag{5.31}$$

$$R_{2,3}: u_j^{n+1}=u_j^n+\lambda_3(u_{j+1}^n-u_j^n).\quad (j=m_2,m_2+1) \tag{5.32}$$

$$R_3: u_j^{n+1}=u_j^{n-1}-\lambda_3(u_{j+2}^n-8u_{j+1}^n+8u_{j-1}^n-u_{j-2}^n)/6. \tag{5.33}$$

$$(j=m_2+2,\cdots,m_3-2)$$

$$R_{3,4}:\begin{cases} u_{m_3-1}^{n+1}=u_{m_3-1}^{n-1}-\lambda_3(u_{m_3+3}^n-8u_{m_3}^n+8u_{m_3-2}^n-u_{m_3-3}^n)/6. \\ u_{m_3}^{n+1}=u_{m_3}^{n-1}-\lambda_3(u_{m_3+6}^n-8u_{m_3+3}^n+8u_{m_3-1}^n-u_{m_3-2}^n)/6. \end{cases} \tag{5.34}$$

$$R_4: u_j^{n+1}=u_j^n+\lambda_4(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)/2+\lambda_4^2(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)/2. \tag{5.35}$$

$$(j=m_3+1,\cdots,m_4-1)$$

$$R_5: u_{m_4}^{n+1}=\sin(4+(n+1)k). \tag{5.36}$$

其中R_0,R_5为左、右边界格式. R_i为(i—1,i)区间中的基本格式，$R_{i,i+1}$为R_i,R_{i+1}中联接关系式.

3)格式(5.28)—(5.36)的稳定分析

①R_0,R_1 为耗散格式.($\lambda_1\leqslant\sqrt{3}/2$)$R_2,R_3$ 为酉格式.($\lambda_2\leqslant1$, $\lambda_3\leqslant0.728745$)$R_4$ 为 L-W 耗散格式($\lambda_4\leqslant1$)故 R_i 分别为柯西稳定.

②R_1,R_2 中已有一个为耗散,而且 $p_1=r_2=1$.故 $R_{1,2}$(5.30)相当于直接转移关系,M 为整数.

③R_2,R_3 均为酉格式,而且有 $p_2=1,r_3=2,M=4$ 为整数,故应用联接格式(5.26),即 $R_{2,3}$(5.32).

④R_3,R_4 中 $p_3=2,r_4=1,M=3$.联接格式 $R_{3,4}$(5.34)相当于用直接转移格式,理由同②.

⑤插入联接关系格式 $R_{1,2},R_{2,3},R_{3,4}$后成为 $R_0+R_1+R_{1,2}+R_2+R_{2,3}+R_3+R_{3,4}+R_4+R_5$.这时相邻格式至少有一为耗散,格式不超过三层.

⑥引理 5.6 的 4 个条件中的 3)为满足,故 R_0,R_1 为初边值问题耦合稳定.而 R_4,R_5 由定理 5.2 前面的注,可知其为恒稳定.

由上述分析,可知定理 5.3 中条件全部满足而(5.28)—(5.36)双边值问题多重套网格是稳定的差分格式.

4)数值计算结果

n	n_1	n_2	n_3	n_4	真解 $u(x,t)$	$\max\lvert v_j^n-u(x_j,t_n)\rvert$
20	10	20	5	15	$\sin(x+t)$	$1.41812\cdot10^{-2}$
40	20	40	10	30	$\sin(x+t)$	$4.47086\cdot10^{-3}$
80	40	80	20	60	$\sin(x+t)$	$1.23549\cdot10^{-3}$
160	80	160	40	120	$\sin(x+t)$	$3.26728\cdot10^{-4}$
320	160	320	80	240	$\sin(x+t)$	$8.51485\cdot10^{-5}$

由上述计算结果可看出误差为 $O(h^2)$

5)计算程序

```
PROGRAM CH(Input,Output);
    Const   M=40; n1=20; n2=40; n3=10; n4=30;
    Var   u0,u1,u2: Array [0..2000] of ReaL;
    n,j: Integer;
    R1,R2,R3,R4,h1,h2,h3,h4,k,e,e1;reaL;
Begin   r1:=n1/M; r2:=n2/M; r3:=n3/M; r4:=n4/M;
    h1:=1/n1; h2:=1/n2; h3:=1/n3; h4:=1/n4; k:=1/M;
    j:=0; Repeat u0[j]:=sin(j*h1);
                u1[j]:=sin(k+j*h1); j:=j+1;
         untiL j>n1;
    Repeat u0[j]:=sin(1+(j-n1)*h2);
           u1[j]:=sin(1+(j-n1)*h2+k); j:=j+1;
    until j>n1+n2;
    Repeat u0[j]:=sin(2+(j-n1-n2)*h3);
           u1[j]:=sin(2+(j-n1-n2)*h3+k); j:=j+1;
    until j>n1+n2+n3;
    Repeat u0[j]:=sin(3+(j-n1-n2-n3)*h4);
           u1[j]:=sin(3+(j-n1-n2-n3)*h4+k); j:=j+1;
    until j>n1+n2+n3+n4;
n:=2;
Repeat u2[0]:=u1[0]+r1*(u1[1]-u1[0]);
       u2[1]:=u1[1]+r1*(u1[2]-u1[1]);
```

```
j:=2;
Repeat u2[j]:=u0[j]+r1 * (u1[j+1]-u1[j-1])
        -1/64 * (u0[j+2]-4 * u0[j+1]+6 * u0[j]
        -4 * u0[j-1]+u0[j-2]); j:=j+1;
until j=n1-1;
u2[j]:=u0[j]+r1 * (u1[j+1]-u1[j-1])
   -1/64 * (u0[j+3]-4 * u0[j+1]+6 * u0[j]
   -4 * u0[j-1]+u0[j-2]); j:=j+1;
u2[j]:=u0[j]+r1 * (u1[j+2]-u1[j-1])
   -1/64(u0[j+4]-4 * u0[j+2]+6 * u0[j]
   -4 * u0[j-1]+u0[j-2]); j:=j+1;
Repeat u2[j]:=u0[j]+r2 * (u1[j+1]-u1[j-1]);
  j:=j+1;
until j=n1+n2;
u2[j]:=u1[j]+r3 * (u1[j+1]-u1[j]); j:=j+1;
u2[j]:=u1[j]+r3 * (u1[j+1]-u1[j]); j:=j+1;
Repeat u2[j]:=u0[j]-r3/6 * (u1[j+2]
  -8 * u1[j+1]+8 * u1[j-1]-u1[j-2]);
  j:=j+1;
until j=n1+n2+n3-1;
u2[j]:=u0[j]-r3/6 * (u1[j+4]-8 * u1[j+1]
  +8 * u1[j-1]-u1[j-2]); j:=j+1;
u2[j]:=u0[j]-r3/6 * (u1[j+6]-8 * u1[j+3]
  +8 * u1[j-1]-u1[j-2]); j:=j+1;
```

```
    Repeat u2[j]:=u1[j]+(u1[j+1]-u1[j-1])
      * r4/2+r4 * r4/2 * (u1[j+1]-2 * u1[j]
      +u1[j-1]);j:=j+1;
    until j=n1+n2+n3+n4;
    u[j]:=sin(4+n * k);
    j:=0;
    Repeat u0[j]:=u1[j]; u1[j]:=u2[j]; j:=j+1;
    until j>n1+n2+n3+n4;
    writeln (n);
    n:=n+1;
until n>M;
    e:=0; j:=0;
    Repeat e1:=abs(u1[j]-sin(1+j * h1));
        If e1>e Then e:=e1; j:=j+1;
    until j=n1+1;
    Repeat e1:=abs(u1[j]-sin(2+(j-n1) * h2));
        if e1>e Then e:=e1; j:=j+1;
    until j=n1+n2+1;
    Repeat e1:=abs(u1[j]-sin(3+(j-n1-n2) * h3));
        If e1>e Then e:=e1; j:=j+1;
    until j=n1+n2+n3+1;
    Repeat e1:=abs(u1[j]-sin(4+(j-n1-n2-n3) * h4));
        If e1>e Then e:=e1; j:=j+1;
    until j>n1+n2+n3+n4;
```

```
writeln(e);
END.
```

注　本书第四章§4的所有算例曾在1989—1992年度分别应用Basic语言，Turbo－Pascal 4.0语言在IBM－PC286，386，486计算机上进行计算.其它算例的计算程序，同上述程序大同小异，因篇幅关系，兹从略.在编写过程中，第四章§5，韩磊同志尽了很大的力量。此外在计算过程中，承蒙中国科学院计算中心陈元生同志，韩磊同志以及厦大数学系研究生林才瀚、林斌、陈友滨等五位同志，先后大力协助，进行计算，花了很多时间在计算机上调试，特此感谢.

参 考 文 献

[1]矢嶋信男野木达夫著,王兴宝等译,发展方程数值分析,人民教育出版社,1983,216－220.

[2]M. Ciment. Math. Comp. , **25**(1971) ,219－227.

[3]M. Ciment, SIAM. J. Numer. Anal. , **8**(1972),695-701.

[4]H. O. Kreiss. Math. Comp. , **22**(1968),703-714.

[5]B. Gustafsson, H. O. Kreiss and A. Sundström, Math. Comp. , **26**(1972),649-689.

[6]J. Oliger, Math. Comp. , **30**(1976), 724-738.

[7]M. Goldberg and E. Tadmor, Math. Comp. , **32**(1978),1097-1107.

[8]M. Goldberg and E. Tadmor, Math. Comp. , **36**(1981),603-626.

[9]M. Goldberg and E. Tadmor, Math. Comp. , **44**(1985),361-377.

[10]M. Goldberg and E. Tadmor, Math. Comp. , **48**(1987),503-520.

[11]李欣恺、朴致淳,计算数学,**9**(1987), 381－395.

[12]陈传淡,厦门大学学报(自然科学版),**26**(1987),286－292.

[13]陈传淡,厦门大学学报(自然科学版),**29**(1990),29－33.

[14]陈传淡,厦门大学学报(自然科学版),**31**(1992),334－338, 581－585.

[15] A. Iserl   r, Trans. Amer. Math. Soc., **277**(1983), 77

[16]B. Gustofsson, Math. Comp., **29**(1975), 391-406.

[17]H. O. Kreiss, Math. Comp., **27**(1973), 29-39.

[18]陈传淡,厦门大学学报(自然科学版),**31** (1992),581—585.

[19]Chen Chuandan, Proceeding of International Conference in Scientific Computation, World Scienticfic Singapore, 1992, 172—176.

[20]陈传淡,数学研究纪事,**25**(1992),78—84.

[21]陈传淡、韩磊,厦门大学学报(自然科学版),**32**(1993),129-134.